Leitfaden
für den
Unterricht
in der
reinen Mathematik
auf
Schulen und Gymnasien

von
Jac. Struve
Rector am Lyceum zu Hannover.

Zweyte Abtheilung.

Hannover,
im Verlage der Helwingischen Hofbuchhandlung,
1790.

Geometrie. Erklärung und Eintheilung.

1 Erklärung. Die Geometrie ist die Größenlehre vom Raum und seinen Gränzen, oder, sie ist die Wissenschaft die Eigenschaften und Verhältnisse der Größen der Ausdehnung nach richtigen Grundsätzen und Beweisen zu beurtheilen, und neue Eigenschaften und Verhältnisse derselben zu erfinden.

2. Ein geometrischer Cörper, dessen Gränzen, welche Fläche heißen, einer Fläche Gränzen, welche Linien sind, und die Gränze einer Linie, der Punct, ferner eine gerade oder eine krumme Linie, eine geradlinichte oder krummlinichte oder gemischtlinichte Fläche, eine ebene oder krumme Fläche, sind in dieser Wissenschaft die ersten jedem leicht verständlich gemachten Gegenstände und Begriffe.

3. Eintheilung. Derjenige Raum, welcher in Flächen, die entweder alle geradlinicht und eben sind, oder unter denen sich doch nur solche krummlinichte und krumme oder auch gemischtlinichte Flächen befinden, welche die regelmäßigste krumme Linie, die Kreislinie, einschließt und beschreibt, dieser Raum nebst seinen Gränzen ist der Gegenstand der gemeinen Geometrie; hingegen derjenige Raum, welcher in andern regelmäßigen oder unregelmäßigen krummlinichten und krummen Flächen, ohne geradlinichte und Kreisflächen, oder verbunden mit denselben,

enthalten ist, dieser ist nebst seinen Gränzen der Gegenstand der höhern Geometrie.

Dieß ist eine mehr befassende und richtigere Eintheilung als die in der ersten Abtheilung S. 6. oben von mir angegebene.

4. Erklärungen. Eine gerade Linie heißt unbegränzt, wenn man sie sich nach jeder ihrer beyden Seiten als ohne Ende denkt. Wenn zwey oder mehrere unbegränzte Linien nie nach irgend einer ihrer beyden Seiten zusammen laufen, so heißen sie gleichlaufende oder Parallellinien; zwey solche unbegränzte Linien aber, welche nach ihrer einen Seite hin zusammen und zugleich nach der andern hin auseinander laufen, nennt man in Rücksicht auf diese ihre erstere Eigenschaft convergirende oder zusammenlaufende, und in Rücksicht auf die leztere, divergirende oder auseinanderfahrende Linien. Die Neigung zweyer convergirender in einem Puncte zusammentreffender Linien gegen einander heißt ein ge-

geradlinichter Winkel; der Punct des Zusammentreffens ist sein Scheitel oder sein Scheitelpunct; die beyden Linien selbst seine Schenkel oder Seiten. Krummlinicht ist der Winkel, wenn beyde Schenkel krumme Linien sind; gemischtlinicht, wenn der eine Schenkel geradlinicht und der andere krummlinicht ist. Nebenwinkel, geradlinichte nämlich, sind 2 Winkel, welche bey einem und eben demselben Scheitel und einem beyden gemeinschaftlichen Schenkel die beyden übrigen Schenkel in Einer und eben derselben geraden Linie haben; Scheitelwinkel sind die beyden Winkel, welche dadurch, daß zwey convergirende Linien zusammengetroffen sind, und sich geschnitten haben, gebildet werden. Winkel sind entweder rechte oder schiefe Winkel; ein rechter Winkel ist derjenige, welcher einerley Größe oder Neigung mit seinem Nebenwinkel hat; ein schiefer derjenige, welcher nicht einerley Größe mit dem leztern hat, und also entweder größer als dieser, d. i. stumpf, oder kleiner als dieser, d. i. spitzig ist. Wenn zwey Linien von

einer dritten geschnitten werden, so heißen diejenigen 4 Winkel, welche zwischen jenen beyden entstehen, inwendige, und diejenigen 4, welche über der einen und unter der andern entstehen, auswendige Winkel. Diese 8 Winkel sind paarweise homolog oder gleichliegend, und auch paarweise alterne oder Wechselwinkel; ein homologes oder gleichliegendes Winkelpaar ist hier nämlich dasjenige, dessen zwey Winkel so beschaffen sind, daß der eine, indem diejenige der beyden Linien, an welcher er liegt, auf die andere Linie, und Durchschnittspunct auf Durchschnittspunct, gelegt wird, auf dem andern ganz oder doch zum Theil zu liegen kommt; Wechselwinkel sind diejenigen, welche bey dem eben beschriebenen Aufeinandertragen der beyden Linien sich mit ihrem Scheitel nach Art der Scheitelwinkel berühren. Eine senkrechte Linie (ein Perpendikel, ein Loth, eine Lothlinie) ist diejenige, welche auf einen Punct einer andern so herabfällt, daß sie zwey gleiche Nebenwinkel, d. i. zwey rechte Winkel bildet. Eine Figur ist

eine an allen Seiten mit Linien begränzte Fläche; besonders in der Abbildung auf dem Papiere; geradlinicht, wenn sie in geraden, krummlinicht, wenn sie in krummen, und gemischtlinicht, wenn sie in gemischten Linien eingeschlossen ist. Unter den eine Figur begränzenden Linien, welche ihre Seiten heißen, und zusammen ihren Umfang oder Perimeter ausmachen, heißt diejenige Linie, welche entweder würklich unten liegt, und worauf die Figur gleichsam stehet, oder welche doch als die unten liegende gedacht wird, ihre Basis oder Grundlinie; die Länge des Loths, welches aus dem Scheitel des mit Rücksicht auf die Basis am höchsten liegenden Winkels auf die nöthigenfalls verlängerte Grundlinie gefällt wird, ist die Höhe der Figur. Eine regelmäßige oder regulaire Figur ist diejenige, worin alle Winkel und Seiten gleich groß sind; unregelmäßig oder irregulär heißt sie, wenn diese Eigenschaften fehlen; doch machen diejenigen bald anzuführenden Vierecke, welche man nebst dem Quadrate Parallelogrammen nennt,

hievon eine Art von Ausnahme. Der Zwischenwinkel ist der zwischen zwey angegebenen Seiten einer Figur befindliche Winkel; die Zwischenseite diejenige, welche zwischen zwey angegebenen Winkeln liegt; anliegende Seiten sind die beyden einen angegebenen Winkel einschließenden Seiten; anliegende Winkel diejenigen, welche an den beyden Enden einer angegebenen Seite von dieser und zwey andern Seiten gebildet werden. Figuren sind nach ihrer Seitenzahl entweder Dreyecke, Vierecke, oder Vielecke, d. i. Fünfecke, Sechsecke u. s. w.; alle entweder regelmäßig oder unregelmäßig. Das drey gleiche Seiten habende Dreyeck heißt gleichseitig; das zwey gleiche Seiten habende gleichschenklicht; das keine gleiche Seiten habende ungleichschenklicht. Ferner ist das Dreyeck entweder rechtwinklicht, wenn einer der Winkel desselben ein rechter Winkel ist, und alsdenn heißen die dem rechten Winkel anliegenden Seiten Katheten, und die dritte die Hypotenuse; oder es ist schiefwinklicht, wenn nemlich keiner der Winkel

desselben ein rechter ist; das schiefwinklichte ist entweder stumpfwinklicht oder spitzwinklicht, je nachdem ein stumpfer Winkel darin enthalten oder nicht enthalten ist. Die Gegenseite in einem Dreyecke ist die einem angegebenen Winkel nicht anliegende, sondern gegenüberstehende Seite; der Gegenwinkel der einer angegebenen Seite gegenüberstehende. Das Viereck hat entweder bey 4 gleichen Seiten 4 gleiche Winkel, welche gleiche Winkel rechte Winkel sind, und denn ist es ein Quadrat oder regelmäßiges Viereck; oder bey 4 nur paarweise gleichen Seiten 4 gleiche und rechte Winkel, welches das Rechteck ist; oder bey 4 gleichen Seiten nur paarweise gleiche Winkel, welches die Raute ist; oder endlich nur paarweise gleiche Seiten, und nur paarweise gleiche Winkel, welches die längliche Raute ist; diese 4 vierseitigen Figuren heißen nebst dem Quadrate Parallelogrammen; jedes andere Viereck ist ein unregelmäßiges Viereck oder Trapezium. Gegenseiten, oder sich einander gegen überliegende Seiten, in einem

Vier-

Vierecke, sind diejenigen, welche nicht miteinander den Scheitel eines Winkels in demselben bilden; Gegenwinkel in einem Vierecke, diejenigen, welche gar keinen Schenkel gemeinschaftlich haben; in jedem Viereck gibt es 2 Paar Gegenseiten und auch 2 Paar Gegenwinkel. Der in einem regelmäßigen Vielecke sich befindende zwischen jedem anliegenden Seitenpaare stets gleich große Winkel heißt der Vieleckswinkel. Die Diagonallinie ist die aus einem Winkel einer Figur mit Uebergehung des ersten nächsten nach dem zweyten nächsten Winkel gezogene Linie; auch wol überhaupt die aus einem Winkel einer Figur nach einem andern gezogene gerade Linie. Ein Cirkel oder Kreis ist eine in derjenigen zu ihrem Anfange wiederkehrenden krummen Linie eingeschlossene Figur, welche krumme Linie von dem einen Endpuncte einer geraden Linie beschrieben wird, wenn diese gerade Linie sich um ihren andern unbeweglichen Endpunct auf einer Ebene herumdreht, so daß also alle Punkte der krummen Linie von diesem unbeweglichen Puncte

gleich weit entfernt sind. Die eben beschriebene krumme Linie heißt in Rücksicht auf ihre Natur eine Cirkellinie oder eine Kreislinie, in Rücksicht des Cirkels aber, oder vielmehr der Cirkel- oder Kreisfläche, welche sie einschließt, der Umkreis, der Umfang, oder die Peripherie des Cirkels. Der in der Mitte der Figur von jedem Puncte der Peripherie gleich weit entfernte Punct heißt der Mittelpunct oder das Centrum; jede gerade Linie vom Mittelpuncte nach irgend einem Puncte des Umkreises ein Radius oder Halbmesser des Cirkels; jede gerade Linie von einem Puncte im Umkreise zu einem andern Puncte in demselben, wenn sie zugleich durch den Mittelpunct geht, heißt ein Diameter oder Durchmesser, und wenn sie nicht zugleich durch das Centrum geht, eine Sehne. Der durch eine Sehne, oder auch durch 2 nicht in einer geraden Linie liegende, und also keinen Durchmesser bildende, Halbmesser von dem ganzen Umkreise abgeschnittene Theil heißt ein Bogen; der von einem Durchmesser ab-

abgeschnittene Theil von eben demselben heißt gewöhnlich ein halber Cirkel, d. i. ein halber Umkreis; das Stück der Cirkelfläche oder Cirkelfigur zwischen einer Sehne und ihrem Bogen wird ein Abschnitt oder Segment; das zwischen 2 nicht in einer geraden Linie liegenden Halbmessern und ihrem Bogen ein Ausschnitt oder Sector; das zwischen einem Diameter und seinem halben Umkreise der halbe Cirkel, d. i. die halbe Cirkelfläche genannt. Der Winkel des Abschnitts ist der gemischtlinichte Winkel, welchen die Sehne desselben mit ihrem Bogen macht; der Winkel im Abschnitt derjenige, welcher auf der Sehne oder auf dem übrigen Bogen steht, und in dem Bogen der Sehne seinen Scheitel hat. Centriwinkel sind solche, welche das Centrum zu ihrem Scheitel haben, und mit ihren Schenkeln auf einer Sehne oder einem Bogen stehen; Peripheriewinkel solche, welche irgend einen Punct im Umkreise zu ihrem Scheitel haben, und ebenfalls auf einem Bogen oder auch auf einem halben Umkreise stehen.

Eine

Eine Tangente oder Berührungslinie ist eine solche an den Umkreis gezogene gerade Linie, welche, noch so langefortgesezt, denselben nur in einem einzigen Puncte berührt, nicht aber schneidet. Concentrische Cirkel sind solche, welche ein gemeinschaftliches Centrum; eccentrische solche, welche ein verschiedenes Centrum haben. Eine Figur ist in einem Cirkel oder der Cirkel um sie beschrieben, wenn die Figur ganz auf die Art in dem Cirkel enthalten ist, daß alle ihre Winkel ihren Scheitelpunct in dem Umkreise haben; um einen Cirkel ist sie oder der Cirkel in ihr beschrieben, wenn jede Seite der Figur den Cirkel berührt.

Linie ohne Zusatz verstehe man in diesem und den folgenden §. §. von einer geraden Linie; Winkel ohne Zusatz von geradlinichten ebenen Winkeln.

Die gemeine Geometrie.

5. Eintheilung. Die gemeine Geometrie besteht 1. aus der Euthymetrie und Epipedometrie

trie oder Planimetrie; d. i. aus dem Hauptabschnitte, welcher von den Eigenschaften, Verhältnissen und Größen der geraden Ebenen handelt; 2. aus der Stereometrie, oder dem Hauptabschnitte von den Eigenschaften, Verhältnissen und Größen der geometrischen Körper; beydes in der Einschränkung, welche der 3te §. sezt. Hiezu kommt 3. die Trigonometrie, oder die Lehre die Seiten und Winkel eines Dreyecks nach gewissen Linien, welche man trigonometrische Linien nennt, zu bestimmen, und das Dreyeck nach denselben zu berechnen. Sie heißt die ebene Trigonometrie, wenn sie ebene, d. i. in geradlinichten Seiten eingeschlossene Dreyecke, und die sphärische Trigonometrie, wenn sie sphärische, d. i. auf der Oberfläche einer Kugel durch Cirkellinien gebildete Dreyecke, zum Gegenstande hat.

Mit Verwerfung der S. 6. der ersten Abtheilung gemachten Eintheilung in die reine und in die gemischte Geometrie, d. i. in eine Untersuchung der geometrischen

Lehren ohne Beyhülfe der Arithmetik, und mit Beyhülfe der leztern, werden wir dieſe gemiſchten Lehren theils an ihren gehörigen Oertern einſchalten, theils in der höhern Rechenkunſt nachholen.

6. Grundſäze. Außer den allgemeinen Grundſäzen für alle Größen, welche §. 7. der erſten Abtheilung angeführt worden ſind, giebt es hier noch folgende, welche zum Theil die beyden Forderungen vorausſezen, daß man ſowol durch jede zwey gegebene Puncte eine gerade Linie ziehen und ſolche nach Gefallen verlängern, als auch aus jedem Mittelpuncte mit jedem Halbmeſſer einen Kreis beſchreiben könne: 1. Die Länge einer geraden Linie iſt durch ihre Endpuncte, und die Lage einer geraden Linie durch irgend ein Paar ihrer Puncte oder ihrer Elemente beſtimmt. 2. Gerade Linien von einerley Länge ſind gleich, und decken ſich. 3. Es kann von einem von zwey Puncten zum andern nur Eine gerade Linie gezogen werden,

und

und dieſe iſt die kürzeſte, welche zwiſchen den beyden Puncten gezogen werden kann. 4. Eine gerade Linie kann nach beyden Seiten, ſo weit man will, verlängert, oder verlängert gedacht werden, geht aber alsdenn durch keinen ſonſtigen Punct, als der mit ihr urſprünglich in einerley Richtung liegt; d. i. es bleibt immer eben dieſelbe gerade, nur längere, Linie, ſo daß die anfänglich kürzere und alle nachherigen kürzeren in dieſer längern liegen, und Theile derſelben ausmachen. 5. Eine unbegränzte Linie theilt die unbegränzte Ebene, worin ſie gezogen iſt, in 2 Theile, welche an entgegengeſezten Seiten derſelben liegen. 6. Aus einem jeden Puncte läßt ſich ein Kreis ziehen, der eine gegebene unbegränzte Linie wenigſtens in 2 Puncten ſchneiden muß. 7. Weiß man von irgend einem Puncte einer unbegränzten Linie, daß er ſich innerhalb eines Kreiſes befindet: ſo ſchneidet derſelbe den Kreis wenigſtens in 2 Puncten. 8. Zwey gerade Linien können, wenn ſie ſich ſchneiden, ſich nur in Einem Puncte ſchneiden; werden ſie nach

dem

dem Schnitte oder Zuſammentreffen noch fortgeſezt: ſo ſtellt jede 2 Stücke dar, wovon das eine dieſſeits, das andere jenſeits der andern liegt. 9. Winkel von gleicher Neigung ihrer Schenkel, mögen die leztern von welcher Länge seyn, als ſie wollen, ſind gleich und decken einander. 10. Alle Halbmeſſer und Durchmeſſer eines und eben deſſelben Cirkels ſind gleich; auch wenn mehrere Cirkel mit einem und demſelben Halbmeſſer beſchrieben worden ſind, ſind alle Halbmeſſer und Durchmeſſer in ihnen gleich. 11. Der Durchmeſſer theilt Peripherie und Cirkel in 2 gleiche Hälften. 12. Figuren von der Beſchaffenheit, daß, bey gleicher Seiten- und alſo auch gleicher Winkelanzahl, die Winkel der einen, mögen dieſe Winkel unter ſich gleich oder verſchieden ſeyn, den Winkeln der andern in einer und ebenderſelben Ordnung oder Folge gleich ſind, und eben ſo auch die dieſe gleichen Winkel einſchließenden Seiten in einerley Ordnung gleich ſind, dieſe Figuren ſind identiſch, oder ähnlichgleich, und decken ſich einander. 13. Figuren

mit

mit gleichen Winkeln, wie eben in 12, und lauter proportionirten dieſen gleichen Winkeln in einerley Ordnung anliegenden Seiten, ſind ähnlich. 14. Alle Cirkel, mit einem und eben demſelben Halbmeſſer beſchrieben, ſind identiſch und ähnlich gleich; alle mit verſchiedenem Halbmeſſer beſchrieben, ſind ähnlich. 15. Gleiche Sehnen in einem und ebendemſelben Cirkel, oder auch in gleichen Cirkeln, haben gleiche Bogen, und gleiche Bogen gleiche Sehnen.

Zuſaz. 1. Es ergibt ſich von ſelbſt, daß einige dieſer Grundſäze ſich auch theils umkehren, theils verneinend ausdrücken, theils auch verneinend ausgedrückt umkehren laſſen; umkehren; z. B. wenn eine Linie die kürzeſte zwiſchen zwey Puncten iſt: ſo iſt ſie eine gerade Linie; verneinend ausdrücken: Eine nicht gerade und krumme Linie zwiſchen zwey Puncten, iſt nicht die kürzeſte zwiſchen ihnen; verneinend ausgedrückt umkehren: Eine Linie zwiſchen zwey Puncten, welche nicht die kürzeſte zwiſchen ihnen iſt, iſt keine gerade Linie.

Zuſaz 2. Aus dem 3ten Grundſaze folgt theils, daß zu einer geradlinichten Figur wenigſtens 3 Seiten erfordert werden; theils, was nachher auch noch anderweitig erwieſen werden wird, daß die Summe zweyer Seiten eines Dreyecks immer groͤßer ſeyn muͤſſe, als die uͤbrige dritte Seite iſt.

Zuſ. 3. Aus 9 ergibt ſich, daß alle rechte Winkel gleich ſind, und ſich decken; man ſehe auch ihre Erklaͤrung im 4ten §.

Figuren koͤnnen gleich, d. i. von gleicher Groͤße ihrer Flaͤchen ſeyn, ohne aͤhnlich gleich zu ſeyn. — Aus den angegebenen Eigenſchaften der Aehnlichkeit

zweyer Figuren ergibt ſich, daß dieſe Aehnlichkeit alsdann vorhanden ſeyn muß, wenn 1) beyde einerley Seitenanzahl, 2) einerley Groͤße dieſer Seiten, nur nach bey jeder Figur verſchiedenem Maaßſtabe gemeſſen, 3) einerley Folge dieſer Seiten und endlich 4) einerley Nei-

gung jedes aneinander ſtoßenden Seitenpaars gegen einander, d. i. einerley Zwiſchenwinkel haben; kurz, wenn 2 gleiche Mengen von nach verſchiedenem Maaßſtabe gleichen Linien auf völlig gleiche Weiſe zu Figuren, jede Menge zu einer, verbunden werden. Es verſteht ſich, daß bey Cirkeln dieß alles wegfällt, und die immer gleiche Natur der Kreislinie allein dieſe Aehnlichkeit bewürkt.

7. Erklärung. Die Größen der Ausdehnung ausmeſſen oder berechnen, heißt unterſuchen, wie oft dieſelbige eine gleichartige Einheit, welche man zu ihrem Maaßſtabe annimmt, oder deren genaue Theile enthalte; gleichartig iſt dieſe Einheit, oder gleiches Maaßſtabes, wenn er bey den Längen, d. i. Seiten und Linien, eine Linie, bey den Flächen, eine Fläche, bey den Cörpern ein Cörper iſt. Die ſtetige Größe iſt rational, wenn ſie durch die angenommene gleichartige Einheit, oder irgend einen genauen Theil derſelben genau ausgemeſſen wird; irrational, wenn dies nicht angehet.

Ein Quadrat, d. i. eine Fläche von gleicher Länge und Breite, gibt für die Ausmeſſung der Flächen, und ein Würfel, d. i. ein Cörper von gleicher Breite, Dicke (oder Tiefe) und Höhe, für die der Cörper den bequemſten Maaßſtab ab. Auch erklärt man ſich leicht, was Quadratmaaß und Cubicmaaß, z.B. Quadratfuß und Cubicfuß, ſagen wolle.

Planimetrie.

8. Aufgabe. 1) Eine gegebene Linie an einen Punct zu legen. 2) Zwey oder mehrere Linien aneinander zu fügen, oder zu addiren. 3) Zwey verſchiedene Linien von einander zu ſubtrahiren. 4) Einer gegebenen Linie doppeltes, dreyfaches, vierfaches u. ſ. w. zu finden.

9. Aufg. Mit einer gegebenen Linie ein gleichſeitiges, mit zweyen, ein gleichſchenklichtes, und mit dreyen verſchiedenen von gehöriger Länge

(I. §. 6. Zus. 2.) ein ungleichschenklichtes Dreyeck zu beschreiben.

10. Lehrsaz. 1) Die Summe zweyer Nebenwinkel ist immer = 2 R, d. i. der Summe zweyer rechten Winkel gleich.

Zusaz 1. Wenn die Summe zweyer Winkel = 2 R; so können sie Nebenwinkel seyn; die Summe zweyer Winkel, welche nicht Nebenwinkel seyn können, ist nicht = 2 R, u. s. w. Kurz, der Saz ist auch umgekehrt, und verneinend ausgedrückt, und verneinend umgekehrt, eben so gegründet. Kürze halber werde diese Beschaffenheit eines Sazes hinführo bisweilen durch U; V; V; U. ausgedrückt.

Zus. 2. Nur eine senkrechte Linie kann aus einem und demselben Puncte einer Linie errichtet werden. Wenn also von 2 Nebenwinkeln nicht jeder = R, so ist der eine = R + x, d. i. stumpf, und der andre = R — x d. i. spitzig.

Zusaz 3. Die Summe aller Winkel, welche auf einer und ebenderselben Seite einer Linie liegen, und zugleich alle Einen gemeinschaftlichen Scheitel in der lezten haben, ist = 2R.

Zus. 4. Die Summe aller Winkel um einen und denselben Punct, welcher ihrer aller Scheitelpunct ist, ist = 4R.

11. Lehrsaz. Wenn 2 Winkel gleich sind; so sind auch ihre Nebenwinkel gleich; U; V. V; U.

12. Lehrs. Scheitelwinkel sind gleich.

Zusaz 1. Wenn eine Linie die andere senkrecht schneidet; so entstehen 4 rechte Winkel.

Zus. 2. Wenn es erwiesen ist, daß die eine von 2 Linien auf der andern senkrecht steht, so steht auch die leztere auf der ersteren senkrecht.

13. Lehrs. 1) Ein Winkel nebst beyden anliegenden Seiten bestimmen ein Dreyeck. 2)

Eben

Eben so eine Seite nebst ihren beyden anliegenden Winkeln.

Bestimmen heißt bewürken, daß Dreyecke, worin die benannten Stücke gleich sind, ähnlich gleich, oder identisch werden und sich decken, d. i. alle nur ein und dasselbe Dreyeck vorstellen.

Zusaz. Ob die anliegenden Seiten und die anliegenden Winkel in beyden Dreyecken gerade einerley Lage haben, oder nicht haben, macht keinen Unterschied.

14. Lehrsaz. Wenn ein Dreyeck 2 gleiche Seiten hat, so sind die Gegenwinkel derselben, und hat es 2 gleiche Winkel, so sind die Gegenseiten derselben gleich.

Zusaz 1. Ein gleichschenklichtes Dreyeck hat an der Grundlinie 2 gleiche Winkel; U; W. W; U.

Zus. 2. Ein gleichseitiges Dreyeck hat 3 gleiche Winkel, und ist also ein regelmäßiges Dreyeck A und B.

15. Lehrsaz. Drey Seiten bestimmen ein Dreyeck.

Zusaz. 1. Man löset hiedurch die Aufgaben auf. 1. Einen gegebenen Winkel an eine gegebene Linie tragen. 2. Einen gegebenen Winkel halbiren, die Hälfte wieder halbiren u. s. w. 3. Eine gegebene Linie halbiren, die Hälfte wieder halbiren. 4. Aus einem gegebenen Puncte einer Linie ein Perpendikel errichten, und von einem Puncte außer ihr ein solches auf sie herabfallen zu lassen.

Zus. 2. Wenn man aus der Mitte der Grundlinie eines gleichschenklichten Dreyecks eine Linie zum Scheitelpuncte des der Grundlinie entgegen stehenden Winkels zieht, so ist diese Linie ein Loth, und halbirt den eben genannten Winkel und das gegebene Dreyeck; eben so eine senkrechte Linie aus diesem Winkel auf die Grundlinie gefällt, halbirt Grundlinie, Winkel und Dreyeck.

16. Lehrsaz. Eine verlängerte Seite eines Dreyecks bildet einen äußeren Winkel an dem Dreyecke, welcher größer ist als jeder Winkel des Dreyecks, der nicht sein Nebenwinkel ist.

Zusaz. Jedes Winkelpaar eines Dreyecks ist $< 2R$; im Fall also ein Dreyeck einen Winkel $= R$, oder gar $> R$ hat, so ist jeder der beyden übrigen Winkel $< R$.

17. Lehrsaz. In jedem Dreyeck hat die größere von 2 Seiten den größeren Gegenwinkel; und der größere von 2 Winkeln die größere Gegenseite.

Zusaz 1. Nur Eine senkrechte Linie läßt sich aus einem Puncte auf eine unbegränzte Linie ziehn.

Zus. 2. Die senkrechte Linie ist die kürzeste unter allen, welche man aus einem und ebendemselben Puncte auf eine Linie ziehn kann. Ihre Länge heißt die Entfernung, oder der Abstand eines Punctes von einer Linie.

Zusaz 3. Alle übrigen Linien, aus einerley Punct mit einer senkrechten auf eine unbegränzte Linie herabgezogen, werden immer länger, je weiter sich ihr Berührungspunct mit der lezteren von dem der senkrechten mit eben derselben entfernt. Alle Winkel, welche diese längeren Linien in ihren Berührungspuncten bilden, und welche natürlich nach der Seite dieser senkrechten Linie hin spitzig sind mit stumpfen Nebenwinkeln, werden immer spitziger, und also ihre Nebenwinkel immer stumpfer, je weiter sich ihr Scheitelpunct auf der unbegränzten Linie auf der einen, oder auf der andern Seite von dem des rechten Winkels, welchen die senkrechte Linie bildet, entfernt. Für jeden gegebenen spitzigen oder stumpfen Winkel, dessen Scheitelpunct in den unbegränzten Linien seyn, und dessen Einer Schenkel durch jenen Punct gehen soll, gibt es auf der unbegränzten Linie nur 2 Puncte, nemlich an jeder Seite des Berührungspuncts der senkrechten Linie nur einen.

Zusaz 4. Eine Seite, und zwey nicht beyde an ihr liegende Winkel bestimmen ein Dreyeck. Also Eine Seite, und ein Winkelpaar, gleichviel welches, bestimmen ein Dreyeck m. vgl. §. 13. 2.

Zus. 5. Die Summe zweyer Seiten ist immer größer als die dritte, und der Unterschied derselben kleiner als die dritte Seite.

Zus. 6. Wird auf die Grundlinie eines gegebenen Dreyecks noch ein Dreyeck so errichtet, daß dessen dieser Grundlinie entgegenstehender Winkel sich innerhalb der Fläche des erstern Dreyecks befindet, und das leztere Dreyeck also augenscheinlich kleiner wird: so ist der in dem kleineren Dreyecke der gemeinschaftlichen Grundlinie entgegenstehende Winkel größer, als der in dem größeren Dreyecke, hingegen die Summe der beyden an ihm liegenden Seiten ist in jenem kleiner als in diesem.

18. Lehrsaz. Wenn 2 unbegränzte Linien gegen einander die Lage haben, daß von irgend 2 Puncten in der einen Linie der eine Punct der andern Linie näher ist, als der andere Punct: so müssen diese beyden Linien nach der Seite hin, wo der entferntere Punct liegt, durchaus immer weiter sich von einander entfernen, und auseinanderlaufen, nach derjenigen aber, wo der nähere Punct liegt, sich einander immer mehr nähern und zusammenlaufen, bis sie sich schneiden, und alsdenn auch nach der entgegensezten Seite immer weiter auseinander laufen. Ferner, wenn 2 unbegränzte Linien nach der einen Seite hin con- und nach der andern divergiren; so haben irgend 2 Elemente in der einen, einen verschiedenen Abstand von der andern, kleiner nach der con- und größer nach der divergirenden Seite hin. Wenn aber irgend 2 Elemente in der einen Linie einen gleichen Abstand von der andern haben, so ist sie in allen ihren Elementen von der andern gleichweit entfernt, und die Linien sind parallel; eben so sind die Linien parallel, so hat jedes Elemen-

ten;

tenpaar in der einen einen gleichen Abstand von der andern.

Beweisführung. I. In Ansehung der Lage zweyer gerader unbegränzter Linien gegen einander finden nur folgende 2 Fälle statt: 1) Sie können eine solche Lage haben, daß sich Ein gemeinschaftlicher Punct in beyden befindet. 2) Eine solche, daß sie gar keinen gemeinschaftlichen Punct haben. Ein dritter Fall, daß sie 2 oder mehrere Puncte gemeinschaftlich hätten, kann, wie jeder von selbst einsieht, darum nicht angenommen werden; weil sie sich alsdenn decken und nur Eine Linie ausmachen würden.

II. Haben 2 unbegränzte Linien Einen Punct gemeinschaftlich, so ist ihre Lage so, daß jedes nach diesem gemeinschaftlichen folgende Element der Einen sich immer weiter von der andern entfernt. Man denke sich ab und cd als 2 unbegränzte Linien, welche den Punct e gemeinschaftlich haben; jeder sieht ein, daß cd das nach e nächste Element f nicht mehr mit ab gemeinschaft-

schaftlich haben könne, weil sich die Linien sonst decken würden; f muß sich also durchaus über ab erheben. Dadurch hat cd nun die Lage, daß alle ihre folgenden Elemente nicht nur außer der ab liegen, sondern auch successive sich immer weiter von ihr entfernen. Man nehme nur nach Willkühr irgend ein späteres folgendes Element in cd an, x zum Exempel; dieß befindet sich in irgend einer Entfernung von ab; aber ex wäre keine grade Linie, welches es doch als ein Theil von cd ist, wenn nicht alle Puncte von e bis x sich immer weiter von ab entfernt hätten. Soll nemlich ex eine gerade Linie seyn, und dabey von einem Puncte e in ab aus nach einem andern Puncte x, der in namhafter Entfernung von ab sich befindet, hinführen: so muß das Element e, welches gleichsam durch Fortbewegung ex bildet, in jedem Momente sich weiter von ab entfernen, und so jedem folgenden Elemente seine Stelle in einer größeren Ferne von ab anweisen. Ein Punct e, welcher von e nach X eine gerade Linie bestimmen sollte, und gleichwohl

wohl zweyen auch noch so kleinen Elementen eine Lage anwiese, worin sie gleichweit von ab abstünden, dieser Punct vergäße in diesen beyden Elementen gleichsam seine Bestimmung, versäumte sich gleichsam, und bildete nicht mehr den kürzesten Weg, d. i. keine gerade Linie zwischen e und x. Noch weniger kann eine gerade Linie zwischen e und x durch ein folgendes Element gehn, welches ab näher läge, als irgend ein vorhergehendes; das wäre gar statt des kürzesten Weges ein Abweg. Hingegen bewürkt diese eigenthümliche Lage einer Linie, daß sie durch immer neue entferntere Elemente geht, welche eigenthümliche Lage sie durchaus hat, sobald nur irgend 2 Elemente dieselbe haben, diese, und diese allein bewürkt es, daß sie von einer andern divergirt, und sich ins Unendliche durch alle erdenkliche Abstände von derselben entfernt. Folgende Säze sind also vollkommen richtig. 1. Wenn eine unbegränzte Linie sich nach der einen Seite hin immer weiter von einer andern entfernen soll: so muß von 2 Elementen in ihr dasjenige, welches

ches nach dieser Seite hinliegt, entfernter von der andern Linie seyn, als das nicht nach dieser Seite hinliegende. 2) Ist das leztere, und bloß wenn das leztere ist: so ist auch das erstere. Jene Würkung kann nur allein diese Ursache haben; diese nicht ohne jene seyn. Wo jene ist, da ist diese auch; wo jene nicht ist, ist diese auch nicht; auch kann jene Würkung eben so wenig ausbleiben, wenn diese Ursache vorhanden, als sich eräugnen, wenn diese nicht da ist.

III. Man kann die Linie von e nach x auch als Fortbewegung des Punctes x gebildet sich vorstellen, wo denn jedes folgende Element der ab näher ist, als das vorhergehende, alsdenn ergibt sich auf ähnliche Art, wie in II: 1. Wenn eine unbegränzte Linie nach der einen Seite hin mit der andern zusammenfahren soll: so muß von 2 Elementen in ihr dasjenige, welches nach dieser Seite hinliegt, der andern näher seyn, als das nicht nach dieser Seite hinliegende. 2) Ist dies leztere, so muß das erste seyn. Der Abstand sey noch so groß, er nimmt immer ab, und muß, weil

die

die Linie unbegränzt ist, unausbleiblich in Null, und sogar in entgegengesezte Größen übergehn, d. i. die Linie trift nicht nur mit der andern zusammen, sondern schneidet sie, und entfernt sich darauf auf der entgegensezten Seite immer weiter von der andern. Auch hier beym Convergiren ist eben der genaue und jede Abweichung ausschließende Zusammenhang zwischen Ursache und Würkung, welchen wir in II beym Divergiren bemerklich gemacht haben.

IV. Weiß man aber von irgend einem Elementenpaare der einen Linie, daß sie in gleicher Entfernung von der andern Linie sind: so kann jene weder nach der einen Seite hin mit dieser convergiren, noch nach der andern Seite hin mit mit ihr divergiren, wie das in II und III gesagte sattsam darthut. Ferner müssen alsdenn auch alle übrigen Elemente der ersteren sich in einem gleichen Abstande von der leztern befinden. Wäre nach der einen Seite hin irgend ein Element der lezteren näher, oder entfernter von ihr, so wür-

de die Linie nach dieser Seite hin con, oder divergiren, und gleichwohl durch 2 oder gar mehrere gleichweit von der andern entfernte Elemente gehen, welches nach II und III unmöglich ist. Also ist ausgemacht: ist die Lage einer Linie so, daß 2 Puncte derselben in gleichem Abstande von einer andern sind: so sind alle ihre Puncte in diesem gleichen Abstande von derselben, und die Linien können weder im geringsten nach der einen Seite hin convergiren, noch nach der andern hin divergiren, sondern sie sind parallel. Eben so umgekehrt: wenn Linien nicht convergiren und divergiren, sondern parallel sind, so liegen alle Puncte der Einen gleichweit von der andern entfernt.

19. Lehrsaz. Werden 2 Linien von einer 3ten geschnitten: so haben die dadurch entstehenden 8 Winkel entweder diese Beschaffenheit, daß jedes Wechselwinkelpaar zwey gleiche Winkel, und zugleich jedes homologe, (gleichliegende) Winkelpaar 2 gleiche Winkel enthält, ferner

auch

auch zugleich jedes inwendig oder auswendig auf einer und derselben Seite der schneidenden Linie liegende Winkelpaar = 2 R ist, und zwar dieß alles so, daß aus dem Daseyn dieser Gleichheit bey irgend einem der angeführten Winkelpaare gleich das Daseyn derselben bey allen übrigen folge, oder jene Winkel haben die Beschaffenheit, daß die erst angeführten Winkelpaare nicht 2 gleiche Winkel enthalten, auch die nachher bemerkten Winkelpaare nicht = 2 R sind, und dieß wiederum so, daß die Abwesenheit dieser Gleichheit in einem Paare ebendieselbe in allen übrigen nach sich ziehe.

20. Lehrsaz. I. Wenn irgend ein Winkelpaar unter jenen 8 im 19. §. angeführten die eben daselbst bemerkte Eigenschaft der Gleichheit hat: so sind die beyden durchschnittenen Linien Parallellinien; u. II. Wenn aber irgend ein Winkelpaar jene Eigenschaft der Gleichheit nicht hat; so sind die Linien nicht parallel, sondern con- und divergirend.

Die Beweisführung braucht izt in I nur auf die bekannte Art darzuthun, daß diese Linien darum nach keiner Seite zusammenlaufen können, weil Dreyecke unmöglich sind, worin die Summe zweyer Winkel = 2 R sey; alsdenn ist aus §. 18. einleuchtend, daß auch alle Elemente der einen gleichweit von der andern entfernt sind. Das in II. behauptete wird so mit Beyhülfe des 18. §. bewiesen: das inwendige an der einen Seite der durchschneidenden Linie liegende Winkelpaar ist = 2 R — x und zugleich das eben so an der andern liegende 2 R + x. Man ziehe aus dem einen Durchschnittspunct der einen Linie nach der in I. des §. leicht aufzufindenden Anweisung eine mit der andern gleichlaufende Linie: so muß, weil das inwendige Winkelpaar zwischen dieser neuen, und der lezteren an beyden Seiten der durchschneidenden = 2 R ist, die eine gegebene Linie an der einen Seite, wo die Winkelsumme = 2 R — x war, sich durchaus in einer solchen Lage zeigen, daß ihre Elemente der andern gegebenen immer näher kommen, folglich

muß

muß nach §. 18. die erste mit der leztern durchaus zusammenlaufen; eben so erheben sich auf der andern Seite die Elemente der einen gegebenen Linie über die nachher gezogene Parallellinie unaufhörlich, und sie divergirt also unaufhörlich von der zweyten gegebenen Linie.

Zusaz 1. Man kann nach diesen und auch nach dem 18. §. Parallellinien ziehen.

Zus. 2. Jede Linie, welche 2 Parallellinien schneidet, bildet solche, im 19. §. bestimmte inwendige Winkelpaare, wovon jedes = 2 R, folglich auch das Loth, welches von dem einen auf die andere herabfällt, folglich ist dieß Loth der Abstand beyder Puncte, sowohl des, aus dem sie auf die andre herabfällt, von dieser andern, als des, auf den sie in der lezteren fällt, von der ersteren, und alle Lothlinien, welche entweder auf der unteren Parallellinie errichtet werden, oder von der oberen auf dieselbe herabfallen, sind gleich. Auch ersieht man, daß, wenn eine dritte Linie einer von zweyen Parallel-

linien gleichlaufend gezogen wird, sie auch der zweyten parallel seyn muß; eben so eine vierte, einer von dreyen gleichlaufend gezogen, u. s. w. Die Lothlinie zwischen zweyen ist, gehörig verlängert, auch das Loth zwischen jeder von den folgenden, und jeder von den vorhergehenden.

Zusaz 3. Daß Parallellinien nie zusammen laufen, hängt gar nicht von ihrem Abstande ab, sondern blos von ihrer im 18. §. bemerkten Lage gegen einander, auch, daß convergirende Linien sich endlich durchaus treffen müssen, hängt von ihrer eigenthümlichen Lage ab, nicht von dem Abstande irgend eines Elementes der einen von der andern. Wie lange aber eine mit einer andern convergirende Linie nach einem in ihr gegebenen Puncte noch fortzulaufen habe, bis sie mit der lezteren zusammentreffe, hängt zugleich von dem Abstand dieses ihres Punctes von der andern, und von ihrem mehreren oder wenigern Convergiren ab. Auch kann kein noch so entfernter Punct in der andern angegeben werden,

daß nicht die erstere, wenn man sie entweder in dem angenommenen Puncte weniger convergiren, oder in demselben einen weiteren Abstand von der andern haben läßt, in einem noch entfernteren Puncte erst mit ihr zusammenlaufen sollte.

Beweisführung. Gesezt, cd convergirt mit ab, und im Puncte e ist ihr Abstand von derselben ef; so muß einmal ihr ferneres Fortlaufen, bis sie mit ab zusammentrift, wenigstens $>$ ef seyn. Nennt man nemlich den Punct, worin sie mit ab zusammen trift, y; so ist efy ein Dreyeck, worin Winkel efy $=$ R und Winkel fey $=$ R $-$ x, weil die Linien convergiren sollen; auch ist nach §. 16. Zus. fye $=$ R $-$ q folglich ist nach §. 17. ey $>$ ef. Nimmt man nun ef kleiner an, so muß bey gleichem Convergiren, d. i. bey unverändertem Winkel fey, y durchaus näher nach f hin liegen, welches theils daraus erhellet, daß die zweyte Linie ey unter der ersten ey wegen der gleichen Winkel als

Parallellinie liegt, folglich diesseits derselben durch ab hindurch läuft, theils auch aus §. 17. Z. 3. erwiesen werden kann. Läßt man ef unverändert, gibt aber dem Winkel fey = R — x mehr Neigung zum convergiren, d. i. läßt x izt einen größern Werth, und also R — x einen kleineren Werth haben, als sie vorher hatten: so wird die neue Linie ey mit der vorigen ey aus dem Puncte e so auseinanderfahrend, daß sie immer an dieser Seite derselben bleibt, folglich ab auch an dieser Seite derselben schneidet, d. i. ein y in ihr angiebt, welches näher bey f liegt, als das y in der ersteren Linie ey. Für die leztere Behauptung, daß über jedes angegebene y noch ein ferneres vorhanden sey, ergeben sich die Gründe daher, daß theils ef immer länger angenommen werden, theils nach jedem Winkel fey noch ein andrer in e angelegt werden kann, worin x einen kleineren Werth habe.

Zusaz 4. Mehrere gleichweit von einander entfernte Parallellinien über einander theilen alle

Linien,

Linien, welche man so durch dieselben zieht, daß der eine Endpunct in die unterste, und der andre in die oberste Parallele fällt, in eben so viele gleiche Theile, sind jene nicht gleichweit von einander entfernt, so schneiden oder theilen sie diese doch in proportionirte Stücke. Außer daß man also die Aufgabe 15. §. 1. 3. in einem weiteren Umfange auflöset, kann man dadurch auch jede Linie in Theile zerlegen, welche dem gegebenen Theilen einer andern proportioniret sind.

Zusaz. 5. Wenn in einem Dreyecke mit der einen Seite eine Parallele gezogen ist: so schneidet dieselbe die beyden übrigen Seiten proportionirt.

Zus. 6. Man löset hiedurch die Aufgabe auf, zu 3 Linien die 4te, und zu 2 die 3te proportionirte Linie zu finden.

21. Lehrsaz. Verbindet man 2 Parallellinien durch 2 andere Parallellinien zu einer Figur: so

sind die ersteren unter sich, und die lezteren unter sich gleich, und es entstehen die nach der verschiedenen Beschaffenheit der Winkel und der Gleichheit oder Ungleichheit des einen Linienpaars mit dem andern im 4ten §. beschriebene Parallelogramme, oder auch Quadrate.

Zusaz 1. Das Quadrat ist also auch zugleich ein Parallelogramm, d. i. eine von Parallellinien eingeschlossene Figur, und der Lehrsaz zeigt, wie man der Aufgabe, aus Einer gegebenen Linie ein Quadrat, aus zwey verschiedenen ein Rechteck, aus einer nebst einem Winkel eine Raute, und aus zwey verschiedenen Linien und einem Winkel eine länglichte Raute zu construiren, ein Gnüge thun könne.

Zus. 2. In jedem Parallelogramm sind die gegenüberstehenden Winkel gleich, und die Summe der beyden an einer und ebenderselben Seite liegenden Winkel ist $= 2R$.

Zus. 3. Sind daher in einem Viereck die gegenüberstehenden Seiten gleich, so ist

es

es kein Trapezium, sondern ein Parallelogramm.

Zusaz 4. Eine Diagonale theilt jedes Parallelogramm in 2 ähnlich gleiche Dreyecke und also in 2 gleiche Hälften; eben so entsteht, wenn man durch den Scheitelpunct zweyer Winkel eines Dreyecks mit den Gegenseiten der Winkel parallele Linien zieht, ein Parallelogramm, zweymal so groß als das Dreyeck.

Zus. 5. Wählt man einen Punct in der Diagonale eines Parallelogramms, und zieht durch denselben 2 mit den beyden parallelen Seitenpaaren des Parallelogramms gleichlaufende Linien; so entstehen 4 Parallelogrammen, von welchen die beyden, durch welche die Diagonale nicht geht, gleich groß sind. Gesezt, das so in 4 andre getheilte Parallelogramm war ein Quadrat, so sieht man, daß auch das auf einer Linie errichtete Quadrat, wenn diese Linie in 2 Theile getheilt worden ist, aus den Quadraten, welche man auf beyden Theilen derselben

errichtet, und aus dem doppelten Rechtecke, welches sich aus den beyden Theilen errichten läßt, besteht, gerade wie in der Arithmetik $x^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ist, wenn man $x = a + b$ annimmt.

22. Lehrsaz. Die Summe der 3 Winkel eines Dreyecks ist = 2 R.

Zusaz 1. Der auswendige Winkel eines Dreyecks, von einer verlängerten Seite desselben gebildet, ist gleich der Summe der beyden Winkel, welche nicht seine Nebenwinkel sind.

Zus. 2. Im rechtwinklichten und stumpfwinklichten Dreyecke ist also jeder der beyden übrigen Winkel, wovon sie nicht den Namen führen, kleiner als R.

Zus. 3. In einem rechtwinklichten und zugleich gleichschenklichten Dreyecke sind alle 3 Winkel bekannt; überhaupt ist in einem gleichschenklichten Dreyecke Ein Winkel bekannt; so sind sie alle bekannt.

Man

Man sieht hier schon, daß es große Bequemlichkeit hat, wenn man den rechten Winkel als ein Aggregat, z. E. R = 90, annimmt, weil alle übrige Winkel in Verhältniß zu demselben stehn, ein spitziger nemlich als (R — x) : R, und ein stumpfer als (R + x) : R, wo man alsdenn x in eben solchen Theilen ausdrücken kann. Der Name dieser Theile und die Unterabtheilungen derselben nebst dem bey ihnen zu beobachtenden Rechnungsverfahren sind theils aus der gemeinen Arithmetik §. 68. ff. bekannt, theils werden sie im folgenden noch erläutert werden.

Zusaz 4. Jeder Winkel, dessen Schenkel auf einem Durchmesser gleichsam stehen, und der seinen Scheitel irgendwo in dem Umkreise des Cirkels hat, ist ein rechter Winkel.

Zus. 5. Die Summe der Winkel einer Figur von x Seiten ist (x — 2) . 2 R. Dieß auch, wenn die Figur einwärtsgehende Win-

kel

kel hat, d. i. solche Winkel, deren am Scheitelpuncte verlängerte Schenkel in die Figur hinein gehen.

23. Lehrsaz. Zwey Seiten und Ein Winkel bestimmen ein Dreyeck, doch muß im Falle der gegebene Winkel spitzig, und dabey die kleinere gegebene Seite eine Gegenseite dieses spitzigen Winkels ist, noch bestimmt werden, ob das Dreyeck spitzwinklicht oder stumpfwinklicht seyn soll.

Zusaz. Man kann nach diesem und dem 13. §. mehreren Aufgaben, Dreyecke zu beschreiben und ein einem gegebenen Dreyecke ähnlich gleiches zu machen, ein Gnüge thun.

24. Lehrs. Sind alle 3 Winkel in 2 Dreyecken gleich; welches sie sind, so bald nur 2 es sind: so sind die in beyden gleichliegenden Seiten proportionirt, und die Dreyecke sich ähnlich; eben so wenn 2 Dreyecke proportionirte Seiten haben: so stehn den gleichliegenden Seiten gleiche

che Winkel gegenüber, und diese Dreyecke sind also ähnlich.

Zusaz. 1. Haben 2 Dreyecke Einen gleichen Winkel, und die diesen anliegenden Seiten sind proportionirt, so sind die Dreyecke schon ähnlich.

Zus. 2. Selbst bey Einem gleichen Winkel und zwey proportionirten diesen Winkel aber nicht einschließenden Seiten sind 2 Dreyecke ähnlich, nur muß, im Falle die bekannte Gegenseite des gegebenen Winkels kleiner ist als die bekannte anliegende, noch bestimmt seyn, ob die Dreyecke stumpf oder spitzwinklicht sind.

Zusaz 3. Man löset nach diesem §. die Aufgabe auf: zu einem gegebenen Dreyecke ein ähnliches zu finden.

25. Lehrsaz. I. Ist jede Seite eines Dreyecks einer Seite eines andern parallel; so sind die beyden Dreyecke ähnlich. II. Dieß auch, wenn nur 2 Seiten in dem einen zweyen in dem

andern parallel sind, und die beyden dritten in einer und derselben geraden Linie liegen.

26. Lehrsaz. Die Linie, welche einen Winkel eines Dreyecks halbirt, schneidet dessen Gegenseite proportionirt mit den anliegenden Seiten; man sehe auch §. 15. Zus. 2.

27. Lehrsaz. I. Ein Loth, welches aus dem rechten Winkel eines gegebenen rechtwinklichten Dreyecks auf die Hypotenuse gefällt wird, theilt dasselbe in 2 sowohl unter einander als dem gegebenen ähnliche Dreyecke. II. Dieses Loth ist die mittlere Proportionallinie zwischen den abgeschnittenen Theilen der Hypotenuse. III. Auch ist jede der Katheten die mittlere Proportionallinie zwischen dem mit derselben zusammen treffenden Theile der Hypotenuse und der ganzen Hypotenuse.

28. Lehrs. Im rechtwinklichten Dreyecke ist jede der beyden Katheten die mittlere Proportionallinie zwischen der Summe und der Differenz der beyden übrigen Seiten.

Zusaz. Man kann also die Aufgabe, zwischen 2 Linien die mittlere Proportionallinie zu finden, sowol nach diesem § als nach § 27. II. III, auflösen.

29. Lehrsaz. Parallelogrammen von gleicher Basis und Höhe, und eben so Dreyecke von gleicher Basis und Höhe, sind gleich groß.

Zus. 1. Jedes Parallelogramm ist doppelt so groß als ein mit ihm gleiche Basis und Höhe habendes Dreyeck.

Zus. 2. Man sieht leicht, wie jedes Dreyeck in ein ihm gleiches Parallelogramm, und jedes Parallelogramm in ein ihm gleiches Dreyeck zu verwandeln ist.

Zus. 3. Jedes Dreyeck läßt sich in ein Parallelogramm mit einer gegebenen Seite und einem gegebenen Winkel verwandeln; so auch jedes Parallelogramm in ein anderes mit diesen bestimmten Stücken.

30. Lehrs. In jedem rechtwinklichten Dreyecke ist das auf der Hypotenuse errichtete

Quadrat der Summe der auf den beyden Katheten errichteten Quadraten gleich.

Zusaz. 1. Ist die Summe der Quadrate zweyer Schenkel so groß als das des 3ten, so liegen jene an einem rechten Winkel.

Zus. 2. Man sieht, wie man 2 Quadrate zu einander addiren und von einander subtrahiren könne.

31. Lehrs. I. Parallelogrammen von gleicher Höhe verhalten sich gegen einander, wie ihre Grundlinien; die von gleicher Basis, wie ihre Höhen; die von verschiedener Basis, und verschiedener Höhe verhalten sich zu einander im zusammengesezten Verhältnisse dieser verschiedenen Größen. II. Alle 3 Behauptungen sind auch von Dreyecken gegründet.

Zus. 1. Wenn also 2 Parallelogrammen, oder 2 Dreyecke, gleich sind: so müssen sich ihre Höhen umgekehrt wie ihre Grundlinien verhalten; u. wenn die Höhen u. s. w.

Zus. 2. Man ersiehet hieraus, wie man Dreyecke und Parallelogrammen theils vervielfältigen, theils in mehrere gleiche Theile theilen kann.

Zus. 3. Zwey aus 4 proportionirten Linien; so construirte Rechtecke, daß das eine aus den beyden äußeren, das andere aus den beyden mittleren, construirt geworden ist, sind gleich groß; eben so wenn 2 aus 4 Linien construirte Rechtecke gleich groß sind: so sind die Linien proportionirt.

Dieß läßt sich auf Dreyecke anwenden; auch sieht man, daß, wenn die Linien in stetiger Proportion stehn, das eine Rechteck ein Quadrat wird.

Zus. 4. Jedes Vieleck, das unregelmäßige sowol als das regelmäßige, läßt sich in ein Parallelogramm mit einem gegebenen Winkel und einer gegebenen Seite verwandeln.

Zus. 5. Man sieht, wie jedes Parallelogramm, jedes Dreyeck und auch jedes Vieleck

in ein Quadrat verwandelt; ferner, wie auf einer gegebenen Basis ein einem gegebenen Parallelogramme ähnliches errichtet werden könne.

32. Lehrs. Aehnliche Parallelogrammen verhalten sich, wie die Quadrate ihrer gleich liegenden Seiten.

Zusaz 1. Dieß ist auch von ähnlichen Dreyecken gegründet.

Zus. 2. Sind 4 Linien proportionirt: so sinds ihre Quadrate auch.

33. Lehrs. Bey ähnlichen Parallelogrammen oder auch ähnlichen Dreyecken, auf den Seiten eines rechtwinklichten Dreyecks errichtet, ist die Summe der beyden Figuren auf den Kathete gleich der Figur auf der Hypotenuse.

Zus. Es ergiebt sich, wie man 2 ähnliche Dreyecke oder auch 2 ähnliche Parallelogrammen zu addiren, oder von einander zu subtrahiren habe, so, daß die Summe oder die Differenz wieder ein ähnliches Dreyeck oder ein ähnliches Parallelogr. darstellen.

34. Aufgaben I. Zu einem gegebenen Dreyecke oder Parallelogramm ein anderes ähnliches Dreyeck oder Parallelogr. zu finden, welches sich nach dem Verhältnisse zweyer gegebenen Linien oder Zahlen zu dem gegebenen Dreyeck oder Parallelogr. verhalte. II. zu 2 Dreyecken oder Parallelogrammen ein dem einen gleiches und dem andern zugleich ähnliches Dreyeck oder Parallelogr. zu finden. III. Zwey Dreyecke oder Parallelogrammen zu einander addiren, und sie von einander subtrahiren. IV. Aus einem bestimmten Theilungspunct im Perimeter ein Dreyeck oder Parallelogramm in 2 gleiche Theile theilen. V. Ein Dreyeck oder Parallelogramm zweymal und mehrmal zu vergrößern, oder auch zu verkleinern, so, daß jedesmal wieder ein ähnliches Dreyeck oder Parallelogramm entsteht.

Zus. Außer dem in IV. verlangten, kann man auch den 3ten, 4ten, 5ten u. s. w. kurz jeden beliebigen Theil von einem Dreyecke aus einem so bestimmten Abschnittspuncte abschneiden.

35. Aufg. Parallelogrammen und Dreyecke auszumessen; auch aus dem angegebenen Flächeninhalte und einer angegebenen diesen Inhalt bewürkenden Dimension die zweyte zu finden; endlich aus den 3 Seiten eines Dreyecks dessen Höhe und also auch Flächeninhalt, wie auch aus 2 Seiten eines rechtwinklichten Dreyecks dessen 3te Seite und Flächeninhalt anzugeben.

36. Lehrsaz. Jedes regelmäßige Vieleck kann in so viele ähnlichgleiche und dabey gleichschenklichte Dreyecke getheilt werden, als dasselbe Seiten hat.

Zusaz 1. Man sieht, wie um jedes regelmäßige Vieleck ein Kreis beschrieben werden kann.

Zus. 2. Wenn sich eine Sehne in dem Umkreise eines Cirkels genau herum tragen läßt: so bildet sie ein regelmäßiges Vieleck.

Zus. 3. Der Winkel jedes Dreyecks am Mittelpuncte ist $\frac{4R}{x}$, wenn x die Seitenanzahl

des Vielecks ist; der Vieleckswinkel ist also $2R - \frac{4R}{x}$.

Zusaz. 4. In demjenigen Vielecke, worin dieses $\frac{4R}{x}$ = ist $R - \frac{2R}{x}$, sind alle obige Dreyecke gleichseitig, d. i. der Halbmesser ist = Vielecks-seite. Es ergiebt sich, daß dieß Vieleck das Sechseck ist; und man ersieht hieraus, wie ein regelmäßiges Sechseck, und daraus, wie ein regelmäßiges Dreyeck, Zwölfeck, Vierundzwanzigeck u. s. w. in einem gegebenen Kreise beschrieben werden.

37. Lehrsaz. Jedes Vieleck von x Seiten, regelmäßig oder unregelmäßig, läßt sich durch Diagonale in $x - 2$ Dreyecke theilen.

Zusaz 1. Hieraus folgt der Vieleckswinkels eines regelm. Vielecks ist = $\frac{(x-2) \cdot 2R}{x}$, welches auch obigem $2R - \frac{4R}{x}$ gleich ist.

Zusaz. 2. Aehnliche Vielecke werden so in eine gleiche Anzahl ähnlicher Dreyecke getheilt.

38. Lehrsaz. Die Seiten ähnlicher regelmäßiger Vielecke verhalten sich zu einander, wie die Halb- oder Durchmesser der um sie beschriebenen Kreise.

39. Lehrs. I. Die Perimeter ähnlicher Vielecke verhalten sich zu einander, wie ein gleichliegendes Seitenpaar derselben. II. ähnliche Vielecke verhalten sich, wie die Quadrate ihrer gleichliegenden Seiten. III. Aehnliche regelmäßige Vielecke, wie die Quadrate der Halb- oder Durchmesser der um sie beschriebenen Cirkel.

40. Aufg. Regelmäßige und unregelmäßige Vielecke auszumessen.

41. Aufgabe. I. Ein Vieleck zu finden, welches einem gegebenen ähnlich sey, und sich zu demselben nach dem Verhältnisse zweyer gegebenen Linien oder Zahlen verhalte. II. Ein solches, welches dem einen zweyer gegebenen ähnlich und dem andern gleich sey. III. Ein

Viel-

Vieleck in gleiche Theile theilen, und dieß theils ohne weitere Bestimmung, theils so, daß die Theilungslinien alle in einem Puncte in der Figur zusammen laufen. IV. Zwey ähnliche Vielecke so addiren, oder sie so von einander subtrahiren, daß die Summe oder der Rest wieder ein ähnliches; auch ein gegebenes Vieleck so multipliciren oder dividiren, daß das Product oder der Quotient wieder ein dem gegebenen ähnliches Vieleck ist.

42. Lehrs. Ein Halbmesser, welcher einen Bogen halbirt, halbirt auch dessen Sehne und steht auf derselben senkrecht; U.

43. Aufg. I. Die Seite eines Quadrates geometrisch zu finden, welches sich in einem gegebenen Kreise beschreiben läßt. II. Die Formel in Buchstaben zu finden, nach welcher man aus der bekannten Seite eines in einem gegebenen Cirkel, dessen Halbmesser also bekannt ist, beschriebenen Xecks die des 2 Xecks berechnet, welches in eben diesem Cirkel beschrieben werden

 kann.

kann. III. Eben solche Formeln für die Seite des in einem mit einem bekannten Halbmesser gezogenen Kreise zu beschreibenden Dreyecks, Vierecks und Fünfecks zu finden.

Zusaz. Die nach diesen Formeln zu bestimmende Länge der Seite eines Vielecks kann man theils geometrisch construiren, theils arithmetisch berechnen. Im leztern Falle ergibt sich durch eine ziemlich genaue aber mühsame Decimalrechnung, es sey in einem Kreise, dessen Halbmesser = 1000, die Seite des 12 Ecks = 517,63809020; des 24 Ecks = 261,05238444; des 48 Ecks = 130,80625846; des 96 Ecks = 65,43816564; des 192 Ecks = 32,72346325; des 384 Ecks = 16,36227921; des 768 Ecks = 8,18120805; des 1536 Ecks = 4,09061258; des 3072 Ecks = 2,04530736; des 6144 Ecks = 1,02265381; des 12288 Ecks = 0,51132692; des 24576 Ecks = 0,25566347; des 49152 Ecks = 0,127831732269; des 98304 Ecks = 0,063915866151.

44. Aufg. Ein regelmäßiges Vieleck um einen Kreis beschreiben.

45. Lehrs. Zwey ähnliche regelmäßige Vielecke, von welchen das eine sich in einem Kreise, das andere aber um eben denselben Kreis beschrieben findet, verhalten sich zu einander, wie die Quadrate der aus dem Centro auf ihre Seite gefällten Lothlinien; ihre Perimeter also, wie diese eben genannten senkrechten Linien.

46. Lehrs. Drey Puncte bestimmen einen Cirkel.

Zusaz. Man löset nach diesem Lehrsatze folgende 3 Aufgaben auf: durch 3 gegebene Puncte einen Kreis beschreiben; aus einem gegebenen Bogen oder Abschnitt den ganzen Kreis beschreiben; eines Kreises Mittelpunct, und also auch dessen Halb- und Durchmesser zu finden.

47. Lehrs. Sehnen in gleicher Weite vom Mittelpuncte sind gleich; auch ist die dem Mittelpuncte nähere Sehne größer als die von demselben entferntere.

Zus.

Zusaz. Kürzere, oder, welches also einerley ist, vom Mittelpuncte entferntere, Sehnen haben flächere, d. i. weniger erhabene, Bogen als längere Sehnen.

48. Lehrsaz. I. Eine senkrechte Linie an eines Halbmessers Endpuncte im Umkreise ist eine Tangente. II. Es kann nicht 2 Tangenten an Einem Berührungspuncte Eines und ebendesselben Kreises geben; sondern jede andere gerade Linie durch eben denselben Punct, welche sich an der einen Seite über der Tangente und zugleich über dem Kreise erhebt, fällt an der andern durchaus nicht zwischen die Tangente und den Kreis, sondern in den leztern hinein, und schneidet ihn, gehörig verlängert, in 2 Puncten. Es ist also unmöglich, zwischen einem Kreise und seiner Tangente irgend eine gerade Linie nach dem Berührungspuncte hinzuziehen.

Zusaz 1. Also ist die senkrechte Linie von dem Berührungspuncte der Tangente durch den Cirkel gefällt desselben Durchmesser; jede aber

aus eben dem Puncte nach einem spizigen Winkel hineingezogene ist eine Sehne.

Zus. 2. Man sieht, wie aus einem gegebenen Berührungspuncte eine Tangente zu errichten ist.

Zus. 3. Der gemischtlinichte Berührungswinkel, welchen eine Tangente mit dem sie berührenden Bogen des Kreises bildet, ist kleiner als jeder auch noch so kleine geradlinichte Winkel. Eben so ist der gemischtlinichte Winkel, welchen ein solcher Bogen mit dem Halbmesser macht, größer als jeder geradlinichte spizige Winkel.

49. Aufgabe. Aus einem gegebenen Puncte eine Tangente an einen Cirkel ziehen.

50. Erklärung. Cirkel, deren Umkreise nur in Einem Puncte zusammentreffen, heißen sich berührende Cirkel; sich inwendig berührend, wenn der eine in dem andern, sich auswendig berührend, wenn sie außer einander liegen. Cirkel, deren Umkreise in zwey Puncten zusammen treffen, heißen sich schneidende Cirkel.

Sich

Sich berührende Cirkel sind in dieser Eigenschaft des Sichberührens

den concentrischen (s. §. 4 gegen das Ende) und den sich schneidenden entgegen gesezt, und eben so die sich schneidenden in dieser ihrer Eigenschaft den concentrischen und den sich berührenden.

51. Lehrsäze. I. Concentrische Kreise können sich nie berühren, oder schneiden; also sich berührende oder sich schneidende Kreise sind immer eccentrisch. II. Wenn 2 Kreise sich inwendig oder auswendig berühren sollen: so können ihre Mittelpuncte und der Berührungspunct nicht anders als in einer und ebenderselben geraden Linie liegen; im entgegengesezten Falle entsteht statt des Berührens immer ein Schneiden. III. Ist in einem Kreise irgend ein Punct angegeben, worin ihn irgend ein anderer Kreis berühren soll, so bildet jeder Halbmesser zwischen diesem Berührungspuncte und irgend einem Puncte, welcher nur mit jenem Berührungs-

puncte

puncte und dem Centro des gegebenen Kreises in einer geraden Linie liegt, einen solchen den gegebenen berührenden, nie einen denselben schneidenden, Kreis. IV. Zwey sich schneidende Kreise schneiden sich nur in 2 Puncten, und haben eine gemeinschaftliche Sehne. V. In der auf dieser Sehne errichteten senkrechten Linie können, wie sich von selbst ergibt, beyder Kreise Mittelpuncte sich nach entgegengesezten Seiten dieser Sehne hin, aber auch nach einer und ebenderselben Seite hin sich befinden. Ist das leztere, so ist der Bogen des größeren Kreises flächer über dieser gemeinschaftlichen Sehne als der Bogen des kleineren.

Zus. 1. Je größer von zweyen sich schneidenden Kreisen, deren Mittelpuncte auf Einer Seite der gemeinschaftlichen Sehne liegen, der größere ist, (d. i. je weiter sein Centrum von dem Centro des kleineren absteht, je größer also sein Halbmesser von seinem Centro bis zu den beyden Schneidepuncten ist): desto flächer wird sein

sein Bogen über der gemeinschaftlichen Sehne, und desto näher kömmt die Länge dieses seines Bogens der Länge der gemeinschaftlichen Sehne.

Zusaz 2. Da nun also ein Bogen nicht nur desto flächer wird, je kürzer seine Sehne ist (§. 47. Zus.), sondern auch, je länger der Halbmesser des Kreises ist: so sieht man, daß der Bogen einer sehr kleinen Sehne in einem sehr großen Kreise eine solche unbeträchtliche Erhabenheit über derselben haben müsse, daß man diese ohne Nachtheil schwinden lassen, den Bogen also der Sehne gleich setzen, und so die Kreislinie rectificiren könne. Völlig gleich wird freylich erst denn ein Bogen seiner Sehne, wenn man sich den Kreishalbmesser unendlich groß denkt.

Zus. 3. Die Rechnung, deren Resultat §. 43. Zus. angeführt geworden, zeigt, daß der Bogen des 98304 Ecks in dem daselbst angenommenen Kreise ohngefähr 0,0000020426, also wenig mehr als 2 Milliontheilchen über sei-

ner

ner Sehne erhaben sey. Läßt man diese schwinden, so verhält sich der Durchmesser zum Umkreise, wie 1 : 3, 14159265305 3952; ein Verhältniß, welches bis zur 9ten Decimalstelle inclusive vollkommen richtig ist.

Zusaz. 4. Wenn 2 Kreise sich berühren, so haben sie in dem Berührungspuncte eine gemeinschaftliche Tangente; U.

Zus. 5. Wenn 2 Kreise zwar durch einen gemeinschaftlichen Punct gehen, aber daselbst nicht eine gemeinschaftliche, sondern 2 verschiedene Tangenten haben: so können ihre Centra nicht mit jenem Puncte in einer geraden Linie liegen, folglich müssen diese Kreise sich schneiden.

Zus. 6. Obgleich der erstere von den §. 48. Zus. 3. angeführten gemischtlinichten Berührungswinkeln kleiner ist als jeder geradlinichte Winkel, so muß man demselben dennoch eine Größe zuschreiben, weil er immer kleiner und kleiner werden kann, indem sich zwischen einer Tangente und einem Kreise zwar keine gerade Linie (48. II),

wohl aber eine unendliche Menge von Kreislinien ziehen läßt, solcher Kreise nemlich, welche den ersten berühren, und mit ihm an einer und eben derselben Seite der gemeinschaftlichen Tagente liegen.

Zusaz 7. Je größer ein Kreis ist, desto weniger Krümmen hat er; natürlich, nicht in dem Sinne, als ob die größere Kreislinie nicht eben so wohl, als die kleinere, sich so sehr krümmen müsse, daß sie wieder zu dem Puncte, welchen man als ihren Anfangspunct annahm, zurückkehre, sondern in soferne sie gleichsam mehr Spielraum hiezu hat, und sich gemächlicher gleichsam nach und nach durch eine größere Laufbahn herum bewegt; kurz in so ferne alsdenn, wenn man einen größern und einen kleinern Kreis sich inwendig berühren läßt, und die ihnen gemeinschaftliche Tangente zieht, hierauf durch gleich lange Sehnen, vom Berührungspuncte aus nach einer und eben derselben Seite in beyden Kreisen gezogen, von beyder Umkreise Bogen abschneidet, der Bogen des Kleinern sich schon weiter von der

Tangente entfernt hat, d. i. sich schon mehr gekrümmt hat, als der Bogen des größern.

52. Lehrsaz. Der Centriwinkel in einem Kreise ist noch einmal so groß als der auf eben demselben Bogen stehende Peripheriewinkel.

Zusaz. 1. Alle auf einem und eben demselben Bogen stehenden Peripheriewinkel sind gleich groß.

Zus. 2. Wird eine Sehne von einer andern Sehne, oder auch von einem Durchmesser geschnitten, so entstehen Theile, welche in umgekehrter Proportion stehen.

Zus. 3. Ein Loth aus irgend einem Puncte eines Durchmessers bis an den Umkreis ist die mittlere Proportionallinie zwischen den dadurch gemachten Theilen des Durchmessers. Wiederum eine Art mittlere Proportionallinien zu finden.

Zus. 4. Es ergibt sich hier aufs neue, was schon §. 22. Zus. 4. enthält, daß der auf einem Halbmesser stehende Peripheriewinkel, wel-

cher also seinen Scheitel irgendwo in dem Umfange des halben Kreises hat, ein rechter Winkel ist; ferner der Peripheriewinkel in einem kleinern Abschnitte ist stumpf, und der in einem größern spitzig; kleiner oder größer nemlich, als ein halber Kreis ist.

Zusaz. 5. Die Summe jedes gegenüberstehenden Winkelpaars eines Vierecks, das in einem Kreise beschrieben ist, ist = 2 R.

53. Lehrsaz. Gleiche Centriwinkel in einem und eben demselben, oder in gleichen Kreisen, stehen auf gleichen Sehnen und Bogen; U.

Zus. 1. Folglich stehen auch gleiche Periepheriewinkel in eben demselben Kreise auf gleichen Bogen; U.

Zus. 2. Diese gleichen Bogen, worauf 2 gleiche Centriwinkel, oder worauf 2 gleiche Peripheriewinkel stehen, haben, wie sich von selbst ergibt, gleiche Ergänzungen zum ganzen Umkreise.

54. Lehrs. Zwey Centriwinkel in einem und eben demselben Kreise verhalten sich, wie ihre beyden Bogen; umgekehrt, wie zweyer Centriwinkel Bogen sich verhalten, so verhalten sich die Winkel selbst.

Zusaz. 1. Da die Summe aller Winkel, welche sich um den Mittelpunct eines Kreises befinden können, = 4R ist, und diese 4R auf dem ganzen Umkreise stehen, oder den ganzen Umkreis zu ihrem Bogen haben: so ergibt sich, 2R haben den halben Umkreis zu ihrem Bogen, und ein R den Viertelumkreis oder den Quadranten; ein stumpfer Winkel hat mehr als den Quadranten zu seinem Bogen, weniger aber als den halben Umfang; ein spitziger Winkel hat weniger als einen Quadranten zu seinem Bogen. Die Schlüsse gelten umgekehrt; z. B. ein Winkel, welcher einen Quadranten zu seinem Bogen hat, ist ein rechter u. s. w.

Zus. 2. Es ist kein anderer Maaßstab ausfündig zu machen, nach welchem man die Größe

der Winkel genau angeben, und sie unter einander vergleichen könne, als der auf diese Operation gegründete, daß man sie als Centriwinkel in einen halben Cirkel trägt, und nun die Größe ihrer Bogen, verglichen mit dem ganzen Umkreise, merkt, und durch diese die Winkelgröße ausdrückt. Bekanntlich hat man zu diesem Endzwecke jeden Kreis in 360 Theile getheilt, oder getheilt gedacht, welche Grade heißen, und deren jeder in 60 Minuten u. s. w. eingetheilt wird. Man versteht nun von selbst, was das sagen wolle, jeder rechte Winkel sey ein Winkel von 90 Grad; jeder stumpfe von mehr als 90, aber weniger als 190 Grad u. s. w. Ueberhaupt jeder Winkel enthält so viele Grade, oder Minuten u. s. w., oder aber auch Grade nebst Minuten u. s. w., als sein Bogen das Maaß eines Grades, einer Minute u. s. w. enthält.

Man erklärt hier leicht die Beschaffenheit und den Gebrauch des bekannten Instrustruments, welches eben daher, weil man alle

alle geradlinichte Winkel mit demselben messen kann, Winkelmesser heißt.

Zusaz 3. Die Größe des Kreises, oder Halbkreises, in welchen man einen Winkel als Centriwinkel legt, um seine Größe durch die seines Bogens auszudrücken, ist völlig gleichgültig. Freylich erscheint der Winkel in einem größern Kreise mit längeren Schenkeln, als in einem kleinern; aber jene Länge oder Kürze der Schenkel hat ja nicht den geringsten Einfluß auf die Größe des Winkels, und der durch längere Halbmesser von einem größern Kreise abgeschnittene Bogen ist durchaus nur ein eben so großer Theil von seinem Umfange, als der durch kürzere von einem kleineren abgeschnittene Bogen von dessen Umfang ist, vorausgesezt, daß in beyden Fällen die Halbmesser gleiche Centriwinkel bilden.

Zus. 4. Das Maaß eines Peripheriewinkels ist die Hälfte des Bogens, auf welchem er steht.

Zus. 5. Aus den 52. 53 und 54 §§. lassen sich noch manche Behauptungen darthun; z. B. von den beyden Winkeln, welche eine Tangente, die in ihrem Berührungspuncte zugleich den Endpunct einer Sehne trift, mit dieser Sehne bildet, ist der eine halb so groß als der Bogen der Sehne, und der andere halb so groß als die Ergänzung dieses Bogens, d. i. sie sind so groß, als die respectiven Peripheriewinkel, die auf diesen Bogen stehen. Nach diesem Saze löset man die Aufgaben auf: Auf jede Linie einen Kreisabschnitt mit einem gegebenen Winkel zu beschreiben, und von jedem Kreise einen Abschnitt nach einem gegebenen Winkel im Abschnitte abzuschneiden. Noch ein Beyspiel: der Winkel, welcher auf einem Bogen steht, und seinen Scheitel sonst irgendwo im Kreise als in dessen Centro oder Peripherie hat, ist halb so groß als die Summe desjenigen Bogens, auf welchem er steht, und desjenigen Bogens, welchen seine über den Scheitelpunct hinaus als sich schneidende Linien fortgesezten Schenkel von dem Umfange abschneiden.

55.

55 Lehrsäze I. Von allen Linien, welche aus einem und ebendemselben Puncte in einem Kreise, außer dem Centro, an den Umkreis gezogen werden können, ist diejenige die längste, welche zugleich durchs Centrum geht; jede dieser lezteren nähere ist länger als die entferntere, und die Verlängerung dieser durch den Mittelpunct gehenden nach der andern Seite bis zum Umkreise ist die kürzeste von allen. II. Von allen Linien, welche von einem Puncte außer einem Kreise an den Umkreis desselben, und hindurch bis wieder an den Umkreis gezogen werden, von allen diesen hindurch gezogenen ist diejenige die längste, welche durch den Mittelpunct geht, und die dieser nähere länger als die entferntere; umgekehrt von den hinangezogenen ist diejenige, welche verlängert den Mittelpunct treffen würde, die kürzeste, und alle übrigen sind desto kürzer, je näher sie dieser sind. III. Die äußern Abschnitte zweyer solcher nach II hindurchgezogener Linien stehen mit den ganzen Linien in umgekehrter Proportion. IV. Ist von zweyen aus einem

Puncte außer einem Kreise gezogenen Linien die eine eine solche hindurchgezogene, die andere aber eine Tangente; so ist die leztere die mittlere Proportionallinie zwischen jener und ihrem äußern Abschnitte; umgekehrt, ist eine Linie dieß leztere in Hinsicht einer hindurchgezogenen und ihres äußern Abschnitts, so ist sie eine Tangente.

Zusaz. Man kann nicht nur mittlere Proportionallinien nach IV finden, sondern ist auch mit Beyhülfe desselben in den Stand gesezt, folgende 2 Aufgaben aufzulösen: 1. Eine Linie so zu theilen, daß der eine Theil zwischen dem andern und der ganzen Linie die mittlere Proportionallinie ist. 2. Ein gleichschenklichtes Dreyeck zu beschreiben, welches an der Basis 2 doppelt so große Winkel habe, als der von den gleichen Schenkeln eingeschlossene ist.

56. Aufg. Aus dem bekannten Durchmesser (d) oder Halbmesser ($r = \frac{1}{2}d$) eines Kreises seinen Umfang (p), und seinen Flächeninhalt (a) finden.

Auflösung. Es ist §. 51. Zus. 3. für jeden Durchmesser und seinen Kreis das Verhältniß 1 : 3, 141592653 . . . ausgemacht; man nenne die lezte Zahl P: so ergibt sich aus $1 : P = d : p$, daß $p = dP$. Dieß dP ist die Basis eines Dreyecks, dessen Höhe $\frac{1}{2}d$ ist; also ist dessen Flächeninhalt, welcher dem Flächeninhalt des Kreises entspricht, a, also $= \frac{1}{4} d^2 P$ oder $d^2 . \frac{1}{4} P$.

Jenes Verhältniß ist von Ludolph von Cöln in 1 : 3, 14159265358979323846264338387950 bis auf 32 Decimalstellen mühsam nach der gemeinen Arithmetik berechnet; auf eine leichtere Art, und noch genauer findet man dasselbe durch die Rechnung des Unendlichen; so hat Lagny es bis zu 127 Decimalstellen in einer Zahlenreihe angegeben, deren bloße Abschreibung ermüdet.

Zus. 1. Die Formel $a = d^2 . \frac{1}{4} P$ gibt $\frac{a}{\frac{1}{4}P} = d^2$ und zeigt, wie man, gesezt a wäre

allein

allein bekannt, d und also auch p daraus finden könne.

Zus. 2. Die Umfange zweyer Kreise verhalten sich zu einander, wie ihre Durch- oder Halbmesser, und jener Flächen wie dieser Quadrate.

Zus. 3. Der Kreis, welchen eine Hypotenuse als Durchmesser beschreibt, ist an Flächeninhalt den beyden Kreisen gleich, welchen die beyden Katheten als Durchmesser beschreiben.

Zus. 4. Aus $a = d^2 . \frac{1}{4} P$ folgt $a : d^2 = \frac{1}{4} P : 1$, d. i. $= 0,785398163397 \ldots : 1$, und man sieht, wie sich der Flächeninhalt jedes Kreises gleich aus seinem Durchmesser finden lasse.

Zus. 5. Aus $p = dP$ folgt $d = \frac{p}{P}$; nun ist $\frac{1}{P} = 0,318309886 \ldots$, also $d = p . 0,318309886 \ldots$; demnach gibt $a = \frac{d^2 P}{4} = \frac{(p . 0,318309886 \ldots)^2 P}{4}$ die Formel an, wie man aus p allein den Flächeninhalt berechnen könne.

könne. Ferner kann man vielleicht die Formel im ersten Zusaze, $d^2 = \frac{a}{\frac{1}{4}P}$, nach welcher man den Durchmesser aus dem Inhalte findet, noch leichter für die Anwendung darstellen, wenn man bedenkt, $d^2 = \frac{a}{\frac{1}{4}P} = \frac{4a}{P} = 4a.0{,}318309886\ldots$; also $d = \sqrt{(4a.0{,}318309886\ldots)}$

Zusaz 6. Man kann eben so gut die Grösse eines Winkels, das ist die Länge seines Bogens, in Grössen ausdrücken, welche mit denen, worin der Durch- oder Halbmesser ausgedrückt ist, gleichnamig sind, (das heißt, welche sich mit den leztern auf einerley Einheit beziehen, sey diese nun unbenannt oder benannt), als man den ganzen Umfang des Kreises in dP durch Grössen ausdrückt, welche mit d, oder $\frac{1}{2}d = r$, d. i. mit den Grössen, wodurch der Durch- oder Halbmesser ausgedrückt sind, die Eigenschaft der Gleichnamigkeit haben. Diese Gleichnamigkeit bewürkt man daher lieber mit dem Halbmesser, als mit

mit dem Durchmesser, weil alsdenn, da doch jeder Winkel einen Kreisausschnitt bildet, der Bogen des Ausschnitts in gleichnamigen Größen mit den Schenkeln des Winkels ausgedrückt ist. Gesezt nun irgend ein Winkel bac, dessen Scheitel am Mittelpuncte liegt, und dessen Schenkel ab und ac den Bogen bc von dem Umfange abschneiden, sey $= x^{o} + y' + z''$ u. s. w. so schließt man richtig, wie sich der ganze Umfang in Graden, oder Minuten, oder Secunden, u. s. w. ausgedrückt zu diesem seinem eben so ausgedrückten Theile verhält, so muß sich jener in mit dem Halbmesser gleichnamigen Größen ausgedrückt auch zu diesem auf eben dieselbe leztere Art ausgedrückt verhalten; das ist $360^{o} : x^{o} : + y' + z''$ u. s. w. $=$ r. 2 P : bc. Hieraus folgt $bc = \frac{x^{o} + y' + z''}{360^{o}} . r . 2P = \frac{x^{o} + y' + z''}{180^{o}}$. r P. Der jedesmalige Werth von $\frac{x^{o} \text{ u. s. w.}}{180^{o}}$ heiße 9, so ist bc $=$ qr P die zu brauchende Formel. Anwenden kann man dieselbe am besten,

sten, wenn man vorläufig berechnet, daß, wenn $r = 1$ und zugleich $q = \frac{1}{180}$, oder $\frac{1}{180 . 60}$, oder $\frac{1}{180 . 60^2}$ d. i. wenn $x^\circ + y'$ ꝛc. nach einander $= 1^\circ$, oder $= 1'$, oder $= 1''$, alsdenn, wenn x° ꝛc. $= 1^\circ$, $bc = 0{,}017453292519$, wenn x° ꝛc. $= 1'$, $bc = 0{,}000290888208$, und endlich, wenn x° ꝛc. $= 1''$, $bc = 0{,}00000 4848136$ seyn müsse; jezt ist das Resultat leicht anzugeben, welches erfolgen muß, wenn r statt des Werthes 1, und $x^\circ + y + z$ statt des Werthes 1°, oder $1'$, oder $1''$ Werthe haben, die entweder ein genaues Vielfaches davon sind, oder auch in Brüchen ausgedrückt geworden. So muß man zum Beyspiel finden, daß in einem Kreise, dessen Halbmesser 10 Zoll wäre, der Bogen eines Winkels von 50 Grad 30 Minuten 15 Secunden 8, 81463994 Zoll enthalte.

Zusaz 7. Die Formel für den Inhalt jedes Ausschnitts bac ist $bac = \frac{qr^2 P}{2}$; der Winkel

Winkel von 50°, 30′, 15″ macht einen Ausschnitt von 44,0731997 Quadratzoll.

Zus. 8. Weiß man außer dem Halbmesser und dem Winkel am Centro auch noch die Sehne bc; so kann man auch den Inhalt des Abschnitts, welchen die Sehne bc mit ihrem Bogen bc macht, berechnen; nemlich $\frac{qr^2 P}{2}$ — Dreyeck bac zeigt denselben an. Gesetzt $x = 60$ Grad; also $bc = ba = r$; oder die Sehne sey die Seite eines regelmäßigen Sechsecks, welches sich in dem Kreise beschreiben läßt: so ist erstlich $\frac{qr^2 P}{2} = 52,359877557$ Quadratzoll; ferner Dreyeck bac, dessen Höhe $\sqrt{\frac{3}{4}r^2}$ ist, $= 43,301270189$ Quadratzoll; folglich $\frac{qr^2 P}{2}$ — Dreyeck bac, oder der Abschnitt bc, $= 9,058607368$ Quadratzoll.

Zus. 9. Ein Quadrat von gleichem Umfange mit einem Kreise verhält sich zu demselben

an Flächeninhalt wie $\frac{1}{4}$ P : 1, das ist nach obigem 4ten Zusatze wie 0,7853981663397 : 1, oder wie a : d². Nemlich wenn des Quadrats Umfang, wie der des Kreises, dP ist, so ist eine Seite des Quadrats $\frac{1}{4}$ dP, und also der Flächeninhalt desselben $\frac{1}{16}$ d^2P^2; des Kreises Flächeninhalt, oder a, ist aber $\frac{1}{4}$ d^2P; demnach Flächeninh. des Qu. zum Flächeninhalt des Kr. $= \frac{1}{16} d^2P^2 : \frac{1}{4} d^2P = \frac{1}{4} P : 1$.

Zusaz. 10. Wenn die Halbmesser $\frac{1}{2}$ d und $\frac{1}{2}$ δ zwey concentrische Kreise beschreiben, und zwar $\frac{1}{2}$ δ den äußeren grösseren, so gibt $\frac{1}{4}\delta^2P$ — $\frac{1}{4}d^2P$ den Inhalt des Ringes zwischen diesen Kreisen an. Auch muß sich das Stück, welches ein Centriwinkel von diesem Ringe abschneidet, zu dem ganzen Ringe verhalten, wie des Winkels Bogen zu 360 Grad.

Zus. 11. Wenn 2, entweder gleiche oder verschiedene, Winkel nach 2 verschiedenen Kreisen gemessen werden, so ist ihr Verhältniß aus dem ordentlichen ihres Bogen und dem verkehrten der Kreis-

Halbmesser zusammengesetzt. Eines größern Kreises Halbmesser und Umfang mögen H und U, eines kleinen h und u, heißen; in jenem befinde sich als Centriwinkel bac, in diesem edf; a und d mögen die Mittelpuncte seyn, bc und ef die abgeschnittenen Bogen: so sind folgende Proportionen richtig:

$$\begin{array}{l} bac : 360^\circ = bc : U, \text{ und} \\ 360^\circ : edf = u : ef; \text{ daher} \\ \hline bac : edf = bc.u : ef.U. \end{array}$$

Nun ist aber nach dem 2ten Zusaze u: U = h : H; u also $= \frac{h}{H}$. U; diesen Ausdruck setze man statt u in der letzten Proportion, so entsteht $bac : edf = bc \frac{h}{H}.U : ef.U = bc.h : ef.H$; welcher leztere Ausdruck obigen Saz beweiset. Beyspiel. H = 20, h = 10: bac = 15°, edf = 18°; man wird die richtige Proportion finden: 15° : 18° = (5,2359877557 . 10) : (3,14159265342 . 20). Gesezt bc und ef wären gleich, so ist bac : edf = h : H: das

heißt:

heißt, wenn 2 Winkel in verschiedenen Kreisen gleich lange Bogen haben: so stehen sie mit den Halbmessern dieser Kreise im umgekehrten Verhältnisse. Wäre also in dem angeführten Beyspiele ef = bc, und bac bliebe = 15°, so muß edf = 30° seyn.

57. Lehrsaz. Beschreibet man einen beliebigen halben Kreis; läßt hierauf dessen Durchmesser zur Hypotenuse eines rechtwinklichten Dreyecks dienen, dessen Katheten irgendwo in des halben Kreises Umfang den rechten Winkel bilden; beschreibt alsdenn mit jeder Kathete auch einen halben Kreis nach der von der Hypotenuse entfernteren Seite: so entstehen zwischen dem Umfange des ersten und denen dieser beyden Halbkreise zwey Mondstücke (lunulae Hippocratis), welche zusammen an Flächeninhalt jenem Dreyecke genau gleich sind.

Zusaz. 1. Sind die Katheten gleich groß, und dies sind sie, wenn jede als Sehne einen Quadranten zu ihrem Bogen hat; läßt man als-

denn ferner aus dem rechten Winkel ein Loth auf die Hypotenuse fallen: so entstehen 2 gleich große Drenecke, und die beyden Mondstücke sind ebenfalls gleich groß; jedes ist nemlich einem der beyden Drenecke genau gleich.

Zusaz. 2. Auch durch Errichtung eines halben Cirkels auf der Hypotenuse eines rechtwinklichten und dabey gleichschenklichten Drenecks, verbunden mit der Errichtung eines Quadranten auf den gleichen Katheten, bildet man ein solches Mondstück, dessen Inhalt sich genau berechnen läßt.

Hier ist der Grund, warum diese krummlinichte Fläche sich genau quadriren, d. i. durch eine geradlinichte Figur, und also auch durch ein Quadrat, genau an Flächeninhalt darstellen ließ, in den ersten und bekanntesten Säzen der gemeinen Geometrie enthalten. Da aber für die genaue Quadratur des Kreises bisher in dem ganzen Gebiete der Geometrie keine eines ähnlichen Beweises fähige Säze ausfündig haben

ben gemacht werden können: so lasse man diese um so viel mehr in ihrer unbekannten Möglichkeit oder Unmöglichkeit ruhen, da sie doch, gesezt sie ließe sich finden, höchst wahrscheinlich ein irrationales Zahlenverhältniß angeben würde, womit uns nicht weiter geholfen wäre.

Stereometrie.

58. Erklärung. Eine gerade Linie liegt oder ist in einer ebenen Fläche, oder Ebene, welche man sich nöthigen Falls unbegränzt denken mag, wenn sich alle ihre Puncte oder Elemente in dieser Ebene befinden; hat die Linie hingegen nur Einen Punct mit der Ebene gemeinschaftlich, so steht sie auf derselben, oder durchschneidet dieselbe. Dieser gemeinschaftliche Punct heißt der Durchschnittspunct der Linie mit der Ebene. Die Linie steht entweder senkrecht oder schief auf der Ebene; senkrecht, wenn sie mit allen Linien in der Ebene, durch den Durchschnittspunct gezogen, einen rechten Winkel bildet; schief, wenn

dies nicht ist. Im leztern Falle sagt man, sie habe eine Neigung gegen die Ebene, oder sie mache einen Winkel oder Neigungswinkel mit derselben. Dieser Neigungswinkel der Linie mit der oder gegen die Ebene ist derjenige Winkel, welchen die Linie, indem man aus einem beliebigen Puncte in ihr ein Loth auf die Ebene fällt, und von dem Durchschnittspuncte dieses Loths zu ihrem eigenen Durchschnittspuncte eine Linie in der Ebene zieht, mit dieser zulezt genannten Linie bildet. Eine Ebene liegt in einer andern Ebene, wenn sich alle ihre Linien und Puncte, kurz alle ihre Elemente in dieser andern Ebene befinden; hat sie aber mit dieser nur Eine gerade Linie gemeinschaftlich, so steht sie auf ihr, oder durchschneidet sie. Diese gemeinschaftliche gerade Linie heißt der beyden Ebenen Durchschnitt oder Durchschnittslinie. Zieht man aus einem und ebendemselben Puncte dieses Durchschnitts zwey auf dem Durchschnitte senkrechte Linien auf die Art, daß die eine ihre Lage in der einen Ebene, und die andere die ihrige in der andern

erhält: so stehen diese beyden Linien auf einander und dies entweder senkrecht, oder nicht. Im erstern Falle sagt man, die Ebenen stehen senkrecht auf einander; im leztern, sie stehen schief auf einander; sie haben eine Neigung, Neigungswinkel gegen einander. Dieser Neigungswinkel der Ebenen gegen einander ist der spizige Winkel, welchen jene zwey, aus einem Puncte des Durchschnitts in beyden Ebenen gezogenen, mit dem Durchschnitt zwar senkrechten, aber nicht senkrecht auf einander stehenden Linien nach der einen Seite hin bilden. Linien und Ebenen sind mit einer Ebene parallel, wenn sie nie mit derselben zusammentreffen, sondern in jedem ihrer Elemente in gleicher Entfernung von derselben bleiben. Ein cörperlicher Winkel oder eine Ecke wird durch wenigstens 3 in einem Puncte zusammentreffende gerade Linien gebildet, von denen nie mehr als je 2 und 2 in Einer Ebene liegen.

Zusaz 2. Ist von einer Linie bekannt, daß irgend ein Elementenpaar derselben in einer Ebene

lieget, so liegen alle ihre Elemente, d. i. sie selbst liegt ganz in dieser Ebene; hingegen weiß man von irgend einem Elemente einer Linie, daß es nicht in einer Ebene liege, so liegt entweder kein einziges Element derselben in dieser Ebene, und die Linie ist der Ebene gleichlaufend, oder es liegt doch kein sonstiges Element derselben in dieser Ebene außer dem, das ihren Durchschnitts-punct mit der Ebene ausmacht, und die Linie steht auf der Ebene. Eine auf einer Ebene ste-hende Linie kann mit derselben nur Einen Punct, den Durchschnittspunct nemlich, gemeinschaftlich haben.

Zusaz. 2. Erst 3 nicht in Einer geraden Linie liegende Puncte bestimmen eine Ebene; nur eine und dieselbe Ebene kann durch diese 3 Puncte gelegt werden; alle durch einerley 3 sol-che Puncte gelegte Ebenen liegen gänzlich in ein-ander, und sind nur eine und eben dieselbe Ebene. Wo solche 3 Puncte sind, da kann eine Ebene, aber auch nur Eine, durch sie gelegt wer-

werden; jeder Winkel, jedes Scheitelwinkelpaar, jedes Dreyeck liegt in einer der Lage nach bestimmten Ebene. Hingegen 2 Puncte bestimmen keine Ebene; eine unzählige Menge Ebenen kann 2 Puncte, und die dazwischen sich befindende gerade Linie, gemeinschaftlich haben.

Zusaz 3. Der Durchschnitt zweyer Ebenen ist eine gerade Linie.

Zus. 4. Werden 2 oder mehrere gleichlaufende Ebenen von einer und eben derselben Ebene durchschnitten, so sind die Durchschnitte lauter Parallellinien.

Ein geometrischer Cörper ist ein von Flächen allenthalben begränzter Raum. Sind diese Flächen geradlinichte Ebenen, d. i. Dreyecke, oder Vierecke, oder Vielecke, so ist jede eine in Seiten und ebenen Winkeln eingeschlossene Figur. Betrachtet man irgend Eine dieser Ebenen, und namentlich Einen ebenen Winkel derselben, nebst seinen

Schenkeln; so wird man gewahr: I. Es müssen mit Rücksicht auf diesen Winkel und dessen Schenkel durchaus 2 Ebenen auf der erstern so stehen, daß ihre Durchschnitte mit derselben die beyden Schenkel des ebenen Winkels sind. II. Daher muß in dem Scheitelpuncte des Winkels der erstern Ebene wenigstens Eine Linie auf derselben stehen — also nicht mit den beyden Schenkeln in einer Ebene seyn — welche neue Linie beyden neuen Ebenen gemeinschaftlich und also ihr Durchschnitt sey, folglich zwar nicht mit beyden Schenkeln in Einer, aber doch mit jedem Schenkel in Einer Ebene, mit diesem nemlich in dieser, mit jenem in jener sich befinde. III. Diese dritte Linie braucht nicht der beyden die Schenkel mit der ersteren Ebene zum Durchschnitte habenden Ebenen Durchschnitt zu seyn: sondern es können im Scheitel des Winkels mehrere Linien auf der erstern Ebene stehen, und mehrere Ebenen an dem Scheitelpuncte

einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunct haben. Dies zur Erläuterung eines cörperlichen Winkels.

59. Lehrsaz. I. Steht eine Linie in ihrem Durchschnittspuncte mit einer Ebene auf zweyen in derselben liegenden Linien senkrecht, so steht sie auf allen Linien in der Ebene, welche durch diesen Durchschnittspunct gezogen werden, und also auf der Ebene selbst senkrecht. II. Drey oder mehrere Linien, worauf eine und ebendieselbe Linie senkrecht steht, liegen alle in Einer Ebene.

60. Lehrs. I. Stehen 2 Linien auf Einer Ebene senkrecht, so sind sie gleichlaufend. II. Steht von 2 gleichlaufenden Linien die eine auf einer Ebene senkrecht, so ist dies mit der andern auch der Fall.

Zusaz 1. Zwey gleichlaufende Linien können in Einer Ebene liegen, und liegen in Einer Ebene, sobald man nur von irgend einem Ele-

mente der einen weiß, daß es mit der andern in einer Ebene liege; auch zeigt sich, daß, wenn 2 gleichlaufende Linien in Einer Ebene liegen, alsdenn jede sie beyde schneidendeLinie mit ihnen zugleich in dieser Ebene liege.

Zusaz 2. Findet man in irgend einem Puncte des Durchschnitts, daß 2 Ebenen senkrecht auf einander stehen, so wird man auch in jedem andern Puncte des Durchschnitts eben dasselbe finden; es ist also willkührlich, welchen Punct man zur Schäzung dieses senkrechten Standes wählt. Nemlich mit derjenigen Linie, welche man auf die §. 58. und 59. bemerkte Art in dem einen Puncte des Durchschnitts senkrecht auf der einen Ebene stehend findet, sind alle andere Linien aus andern Puncten des Durchschnitts auf eben die Art gezogene gleich laufend, und also auch senkrecht auf eben derselben Ebene.

Zus. 3. Gleichlaufende Linien, welche nicht senkrecht, sondern schief auf einer Ebene stehen, haben alle einerley Neigungswinkel gegen diese Ebene;

Ebene; und daher ist es auch zur Schäzung des Neigungswinkels zweyer gegen einander geneigter Ebenen einerley, aus welchem Puncte des Durchschnitts die §. 58. bemerkten Linien gezogen werden. Daß es auch für die Schäzung des Neigungswinkels einer schiefstehenden Linie einerley sey, aus welchem Puncte man in ihr das Loth herabfallen läßt, läßt sich ebenfalls darthun.

Zusaz 4. Zwey Linien, beyde Einer dritten parallel, sinds unter sich, wenn schon nicht alle 3 sich in einer Ebene befinden.

Zus. 5. Zwey Winkel, deren Schenkel parallel sind, sind gleich groß, sowol wenn diese beyden Winkel sich in zwey verschiedenen, als wenn sie sich in Einer Ebene befinden.

Zus. 6. Aus dem bisherigen ergiebt sich leicht, theils wie man aus einem Puncte außer Einer Ebene ein Loth auf dieselbe fällen, theils eins aus irgend einem Puncte in ihr errichten könne.

Zusaz 7. Aus einem und ebendemselben Puncte außer einer Ebene kann nur Ein Loth auf sie herabgefällt, und aus Einem Puncte in ihr nur Eins errichtet werden. Das Loth ist auch die kürzeste Linie oder der Abstand eines Punctes von einer Ebene.

Zus. 8. Ist aus einem und ebendemselben Puncte außer einer Ebene 1) eine Linie senkrecht auf die Ebene gezogen, und 2) eine zweyte Linie auf nur Eine Linie in der Ebene senkrecht, und man zieht 3) in der Ebene zwischen den beyden Berührungspuncten jener beyden Linien mit der Ebene eine 3te Linie: so bildet diese 3te Linie mit derjenigen, worauf die 2te senkrecht gezogen war, einen rechten Winkel, oder sie liegt senkrecht auf ihr in der Ebene.

Zus. 9. Man habe 1) eine auf einer Ebene senkrecht stehende Linie; ziehe 2) aus deren Berührungspuncte mit der Ebene nach irgend einer zweyten Linie in der Ebene eine auf der leztern in der Ebene senkrecht liegende dritte Linie: so ist jede

jede Linie, welche man aus dem Scheitel des Winkels dieser 2ten und 3ten Linie nach irgend einem Puncte der ersten außer der Ebene zieht, eine auf der 2ten senkrecht stehende Linie.

Zusaz 10. Wann eine Linie auf 2 Ebenen zugleich senkrecht steht, so sind diese nicht sich schneidend, sondern gleichlaufend.

Zus. 11. Die Aufgabe: mit einer gegebenen Ebene eine andere durch einen gegebenen Punct gleichlaufend zu legen, läßt sich durch das bisher vorgetragene auflösen.

Zus. 12. Eine Linie, welche auf einer von zwey gleichlaufenden Ebenen senkrecht steht, steht auch auf der andern senkrecht; ferner eine schief auf einer von zwey gleichlaufenden Ebenen stehende Linie hat eben den Neigungswinkel gegen die andere Ebene; umgekehrt, steht eine Linie auf zwey Ebenen nach gleichem Neigungswinkel, so sind die Ebenen parallel.

Zus. 13. Zwey Ebenen sind gleichlaufend, wenn sich in ihnen zwey Winkel befinden, in jeder einer, deren Schenkel gleichlaufend ist.

Zusaz 14. Zieht man durch 3 oder mehrere gleichlaufende Ebenen auf die Art zwey Linien, daß jede ihren Anfang in der Ebene hat, welche man ihrer Lage nach sich untern allen übrigen denkt, und ihr Ende in derjenigen, welche man sich über den übrigen vorstellt: so wird dieses Linienpaar von den Ebenen proportionirt geschnitten.

61 Lehrsaz. Steht eine Linie auf einer Ebene senkrecht, so steht jede durch jene Linie gelegte Ebene auf dieser Ebene senkrecht.

Zusaz 1. Jedes Loth aus irgend einem Puncte des Durchschnittes zweyer senkrecht auf einander stehenden Ebenen, auf der einen Ebene errichtet, liegt in der andern Ebene; eben so liegt jedes Loth, welches man aus irgend einem Puncte der einen Ebene auf die andere Ebene fällt, in der ersteren Ebene und fällt auf den Durchschnitt.

Zus. 2. Zweyer senkrecht auf einer dritten Ebene stehenden Ebenen Durchschnitt steht gleichfalls senkrecht auf dieser dritten Ebene.

Zusaz

Zusaz 3. Stehen zwey Ebenen schief auf einander, so steht ihr Durchschnitt, und demnach stehen sie beyde selbst vermöge des ersten Zusazes auf derjenigen Ebene senkrecht, welche man durch ihren (der beyden Ebenen) Neigungswinkel legt; also steht auch die zulezt genannte Ebene auf jenen beyden senkrecht.

62. Lehrs. I. Hat die Ebene A gegen die Ebene B eben den Neigungswinkel, welchen die Ebene C gegen die Ebene D hat; so kann man diese so auf den Durchschnitt jener, oder auch jene so auf den Durchschnitt dieser tragen, daß C in A (oder A in C) und D in B (oder B in D) fällt. II Gleichlaufende Ebenen haben alle mit einer sie alle durchschneidenden Ebene einerley Neigungswinkel; und haben mehrere Ebenen mit einer und eben derselben sie durchschneidenden nach einerley Seite hin gleiche Neigungswinkel, so sind sie alle gleichlaufend.

63 Lehrs. Jedes Paar von 3 ebenen einen cörperlichen Winkel einschließenden Winkeln ist größer als der dritte Winkel.

64. Lehrsaz. Jeder cörperliche Winkel, mag er aus 3 oder mehrern ebenen Winkeln bestehen, ist kleiner als 4 R.

65. Aufg. I. Drey ebene Winkel, welche die in 63 und 64 bemerkten erforderlichen Eigenschaften haben, zu einem cörperlichen Winkel zusammen zu setzen; II. An den Endpunct einer gegebenen Linie einen gegebenen cörperlichen Winkel zu legen.

66. Erklärungen. Die hier in der gemeinen Geometrie zu betrachtenden Cörper sind, wenn man einen von einer einzigen krummen Fläche begränzten Cörper, die Kugel, und zwey von Ebenen und krummen Flächen zugleich begränzte, den Cylinder und den Kegel, — von welchen dreyen auch gleich die Rede seyn wird — ausnimmt, alle in geradlinichten Flächen eingeschlossen. Von diesen geradlinichten Flächen nennt man diejenige, welche als unten liegend, oder auf welcher der Cörper gleichsam als stehend, gedacht wird, des Cörpers Grundfläche

oder

oder Basis, deren Seiten die Grundseiten oder Grundlinien heißen. Alle auf dieser Grundfläche stehenden Flächen sind des Cörpers Seitenflächen, und die Durchschnitte, welche diese Seitenflächen mit einander, jede mit den beyden angränzenden, machen, sind des Cörpers Seitenlinien oder Eckseiten. Diese Seitenflächen endigen sich oben entweder in einer gemeinschaftlichen Spitze, wozu, wie jeder sieht, durchaus erfodert wird, daß sie alle Dreyecke sind, oder sie gränzen oben an mehrere, oder auch an Eine geradlinichte Fläche. Im lezten Falle pflegt man diese obenliegende Fläche als eine zweyte Grundfläche des Cörpers anzusehen. Ein Cörper, welcher eine geradlinichte Fläche zur Grundfläche, und lauter sich oben in einer Spitze vereinigende Dreyecke zu Seitenflächen hat, ist eine Pyramide oder Ecksäule; bald 3eckicht, bald 4eckicht u. s. w. nach der durch seiner Grundlinien Anzahl bestimmten Anzahl seiner Eckseiten. Ist die Grundfläche der Pyramide ein regelmäßiges Dreyeck, und jede Seitenfläche ein diesem ähnlich

lich gleiches Dreyeck, so ist die Pyramide ein regelmäßiger Cörper, und zwar ein Tetraedron. Regelmäßige Cörper sind nemlich solche, welche in lauter ähnlich gleichen Flächen eingeschlossen sind. Ein Cörper, dessen Seitenflächen oben alle an eine seiner geradlinichten Grundfläche ähnlich gleiche, und mit ihr gleichlaufende, zweyte Basis gränzen, ist ein Prisma. Dieses Prisma ist ebenfalls entweder dreyeckicht, oder viereckicht u. s. w.; ferner ist es entweder senkrecht oder schief; jenes, wenn die Eckseiten, und zugleich also die Seitenflächen, senkrecht auf der Grundfläche stehen; dieses im entgegengesezten Falle. Da, wie sich zeigen wird, die Seitenflächen eines Prisma lauter Parallelogrammen sind, so nennt man ein Prisma, dessen Grundflächen auch zugleich Parallelogrammen sind, ein Parallelepipedon; welches Parallelepipedon also auch entweder ein senkrechtes oder ein schiefes seyn kann; das erstere, das senkrechte nemlich, ist alsdenn ein rechtwinklichtes Parallelepipedon, wenn seine Grundflächen Rechtecke sind. Ist

die

die Grundfläche eines rechtwinklichten Parallelepipedons ein Quadrat, und jede Seitenfläche ein diesem gleiches Quadrat, so ist dieses Parallelepipedon ein regelmäßiger Cörper, und heißt ein Cubus oder Würfel, auch wol ein Hexaedron. Unter prismatischen Körpern versteht man bald überhaupt Prismata, von welcher Art sie auch seyn mögen, bald die bisher erklärten verschiedenen Parallelepipeda im Gegensaze gegen sonstige viereckichte und gegen dreyeckichte, fünfeckichte und andere vieleckichte Prismata. Von denjenigen Cörpern, deren Seitenflächen an mehrere als Eine obenliegende Flächen gränzen, merkt man das Octaedron, das Icosaedron und das Dodecaedron, regelmäßige Cörper, von welchen der erste in 8, der zweite in 20 regelmäßigen und gleichen Dreyecken, und der dritte in 12 regelmäßigen gleichen Fünfecken eingeschlossen ist. Hat ein Cörper zwei gleiche und parallele Kreisebenen zu seinen Grundflächen, und eine krumme dadurch entstandene Fläche, daß von jedem Elemente des Einen Kreisumfanges

zu jedem Elemente des andern Kreisumfanges lauter mit einer zwischen den Mittelpuncten der beyden Kreisebenen gezogenen geraden Linie gleichlaufende Linien gezogen sind, zur Seitenfläche, so ist er ein Cylinder, oder eine Walze; die von dem Centro des einen Kreises zu dem des andern gezogene gerade Linie ist des Cylinders Axe; der Cylinder ist senkrecht oder schief, je nachdem seine Axe senkrecht oder schief auf seinen Grundflächen steht. Ein Cörper, dessen Grundfläche eine Kreisebene ist, auf deren Umfange sich aus allen Elementen gerade Linien nach einer gemeinschaftlichen Spitze erheben, und so eine krumme Fläche bilden, ist ein Kegel; die gerade Linie zwischen der Spitze und dem Centro der Grundfläche ist des Kegels Axe, nach deren senkrechtem Stande auf der Grundfläche, oder Neigung gegen dieselbe, der Kegel selbst entweder senkrecht, oder schief heißt. Die Höhe aller bisherigen Cörper ist der Abstand entweder ihrer Spitze, oder auch des höchsten Punctes in ihrer am höchsten liegenden Fläche, von der unten

liegen=

liegenden Grundfläche. Eine Kugel ist ein von einer einzigen krummen Fläche, der Kugelfläche, begränzter Cörper, welche ein Halbkreis beschreibt, der um seinen unbeweglichen Durchmesser ganz herum gedreht wird. Der Mittelpunct und der Durchmesser des Halbkreises sind Mittelpunct und Durchmesser der Kugel. Von geradlinichten Ebenen begränzte Cörper sind ähnlich, wenn bey gleicher Anzahl sie begränzender Ebenen jede Ebene des Einen einer Ebene des andern ähnlich ist. Von krummen Flächen allein, oder doch von ihnen zugleich mit Ebenen, begränzte Körper sind sich alsdenn ähnlich, wenn sie auf gleiche Art entstehen; also alle Kugeln sind sich einander ähnlich; ferner ist ein Cylinder einem Cylinder, ein Kegel einem Kegel, ähnlich, wenn ihre Axen einerley Neigungswinkel gegen ihre Grundflächen, und einerley Verhältniß zu derselben Durchmesser haben. Aehnlich gleich sind alle Cörper, welche von gleich vielen ähnlich gleichen Flächen begränzt werden. Endlich sind zwey oder mehrere cörperliche Winkel sich

einander gleich, wenn sie aus einer gleichen Anzahl gleicher ebener Winkel bestehen.

Andere von krummen Flächen, oder von krummen Flächen und Ebenen, begränzte Cörper können theils als Stücke der im §. erklärten betrachtet werden; z. B. der abgekürzte Kegel; theils gehören sie in die höhere Geometrie; theils endlich werden sie in der technischen oder angewandten Mathematik behandelt; z. B. die Lehre vom Visiren der Gefäße und Tonnen.

Zusaz 1. Regelmäßige Cörper können nur entweder Dreyecke oder Vierecke, oder auch Fünfecke, zu ihren begränzenden Flächen haben. Nemlich jeder cörperliche Winkel muß < 4 R seyn (§. 64), und erfodert dabey wenigstens 3 ebene Winkel (§. 58); nun ist aber der Vielecks-winkel eines regelmäßigen Sechsecks $= \frac{4}{3}$ R, eines regelm. Siebenecks $= \frac{10}{7}$ R, eines regelm. Achtecks $= \frac{3}{2}$ R u. s. w.; folglich ist kein cörperlicher Winkel aus ihnen möglich, da derselbe wenigstens

stens respective $= 4 R$ und $4\frac{2}{7}$ und $4\frac{1}{2} R$ u. s. w. seyn würde.

Auch ist die Anzahl der möglichen Arten von durch Drey- oder vier- oder endlich Fünfecke begränzten regelmäßigen Cörper auf die im § angeführten fünf eingeschränkt. Es ergiebt sich nemlich von selbst, daß durch Quadrate kein sonstiger Cörper als der Würfel oder das Hexaedron, begränzt werden könne. Daß aber von regelmäßigen Fünfecken nur ein Dodecaedron, und von regelm. Dreyecken nur entweder ein Tetraedron, oder ein Octaedron, oder endlich ein Icosaedron begränzt werden könne, dieses alles nebst andern Untersuchungen, z. B. über die Art, diese Cörper in einer Kugel zu beschreiben, wird aus dem Grunde der Unbrauchbarkeit mit Recht in der Geometrie jezt übergangen, so sehr die Alten auch diese Untersuchungen geschäzt zu haben scheinen. Wer indeß hierüber aus-

führlichen Unterricht verlangt, findet ihn in des Herrn Prof. Bürja selbstlernenden Geometer.

Zus. 2. Eines Prisma Eckseiten sind theils je zwey und zwey Parallellinien, weil sie gleiche Parallellinien zu einer Fläche vereinigen, theils alle unter einander, wenn schon in verschiedenen Ebenen liegend, parallel, weil jede es mit der ihr nächsten ist; auch sind alle Eckseiten eines Prisma gleich. Es ist demnach jede Seitenfläche eines Prisma ein Parallelogramm; auch stehen eben so, wie eine Eckseite auf der Grundfläche steht, alle übrigen, und also die Seitenflächen selbst, auf dieser Grundfläche, weil die Eckseiten, als Parallellinien, entweder alle senkrecht auf einer und eben derselben Fläche stehen, oder alle einerley Neigungswinkel gegen dieselbe haben. Es braucht kaum erinnert zu werden, daß sie völlig so auf der obern Basis stehen müssen, als man sie auf der untern stehend findet.

Zus. 3. Von den 4 Seitenflächen eines Parallelepipedons ist jedes gegen über stehende Paar gleichlaufend und gleich.

Zus. 4. Man kann sich auch vorstellen, daß die 3 einen Cylinder begränzenden Flächen auf folgende Art beschrieben werden: Man denke sich in einem Parallelogramm die eine Seite unbeweglich, die 3 übrigen aber sich zu gleicher Zeit so um dieselbe herum bewegend, daß die Winkel nie verändert werden; so wird die der unbeweglichen Linie gleichlaufende Linie die krumme Fläche, und ihre beyden Endpuncte die beyden Kreisebenen eines Cylinders beschrieben. Auf diese Art beschreibt jedes Quadrat und jedes Rechteck die Flächen eines senkrechten, jede Raute aber und länglichte Raute die Flächen eines schiefen Cylinders. Auch eines senkrechten Kegels Flächen kann man sich als von einem rechtwinklichten Dreyecke auf eine ähnliche Art beschrieben vorstellen. Noch eine Art der Vorstellung, wie die Cylinderflächen entstehen, ist folgende:

Man

Man habe zwey ähnlich gleiche Parallelogrammen so an einander gefügt, daß eine Linie beyden gemeinschaftlich ist; diese eben genannte Linie sehe man als des Cylinders Axe an, und das vereinte Seitenpaar beyder Parallelogrammen, welches die Axe sowol oben als unten berührt, als die Durchmesser der beyden Kreisebenen. Um diese Durchmesser stelle man sich nun zwey gleichlaufende Kreisebenen vor, und denke hierauf, die eine Kreisebene bewege sich so an der Axe und an den beyden mit diesen gleichlaufenden Linien der Parallelogramme herunter oder hinauf, bis sie in die andere Kreisebene fällt, bewege sich so, sage ich, daß sie, oder, welches einerley ist, ihr Durchmesser, stets einerley Winkel mit der Axe und den beyden übrigen Linien habe, d. i. immer in eine der vorhergehenden völlig gleichlaufende Lage übergehe: alsdenn beschreibt der Kreisebene Umfang in dieser Bewegung die krumme Fläche des Cylinders.

Zusaz 5. Das die Höhe eines Cörpers messende Loth kann außer dessen Grundfläche in

Eine

Eine und ebendieselbe Ebene mit dieser Grundfläche fallen. Einer Kugel kann man entweder gar keine Höhe (nemlich als verschieden von ihren beyden andern Dimensionen, Breite und Dicke) zuschreiben, oder man muß ihren Durchmesser dafür gelten lassen.

Zus. 6. Die Kugel hat zwar nur Einen Mittelpunct, wie der Halbkreis, durch dessen beschriebene Bewegung man sich die Entstehung ihrer Fläche vorstellt, aber nicht so nur Einen Durchmesser; im Gegentheil kann man sich so unzähliche Durchmesser in ihr denken, als man sich Elementenpaare in ihrer krummen Fläche vorstellt. Alle diese Durchmesser sind gleich, und alle Puncte der Kugelfläche sind gleich weit vom Mittelpuncte entfernt.

Zus. 7. Die im 4ten Zusatz beschriebene Art, sich die Entstehung der einen Cylinder und einen senkrechten Kegel begränzenden Fläche vorzustellen, erläutert die Aehnlichkeit dieser Cörper. Alle Cylinder und alle Kegel haben gleich viele Sei-

begränzenden Flächen; jene 3, diese 2. Alle Kreise sind sich ähnlich; folglich sind bey zwey Cylindern, oder bey 2 Kegeln, die Grundflächen sich immer ähnlich. Die beyden dritten krummen Flächen aber haben z. B. bey zwey Cylindern an und für sich nur die Aehnlichkeit, daß sie beyde krumm und in so ferne beyde auf ähnliche Art entstanden sind, als beyde durch eine ähnliche Bewegung eines Parallelogramms beschrieben wurden. Aber nun könnte die krumme Fläche des einen Cylinders noch nach ganz anderm Winkel auf der Basis stehen, als die des andern auf der seinigen; ferner wäre über die Höhe beyder Cörper nichts bestimmt. Beydes läßt sich indeß noch bestimmen, wenn man fordert, daß die beyde Cylinder gleichsam erzeugenden Parallelogrammen ähnlich seyn sollen, und dies ist es, was der §. als Eigenschaften einer genauen Aehnlichkeit angiebt. Eben so mit Kegeln.

67. Lehrs. I. Der Cylinder ist als ein Prisma von unzählich vielen Seiten anzusehen.

II.

II. Wenn eine mit der Grundfläche eines Prisma, oder eines Cylinders, gleichlaufende Ebene diese Cörper schneidet, so ist der Durchschnitt eine den Grundflächen dieser Cörper gleichlaufende ähnlich gleiche Ebene.

Zus. 1. Durch solche Ebenen kann man Prismata und Cylinder in Hälften, und in sonstige beliebige gleiche Theile theilen.

Zus. 2. Prismata oder Cylinder, von ähnlich gleichen Grundflächen, und mit gleichen Neigungswinkeln ihrer Seitenflächen gegen die Grundflächen, verhalten sich wie ihre Eckseiten. Bey Cylindern wird hier jede mit der Axe gleichlaufende Linie von einem Puncte im Umfange der einen Kreisebene zu einem Pnncte im Umfange der andern als eine Eckseite angesehen.

Zus. 3. Solche Prismata, oder Cylinder, verhalten sich zu einander wie ihre Höhen.

68. Lehrs. Parallelepipeda von ähnlich gleichen Grundflächen und gleicher Höhe sind

gleich,

gleich, wenn auch die Seitenflächen nicht nach einerley Winkel auf den Grundflächen stehen.

Zusaz. Also jedes schiefe Parallelepipedon ist einem senkrechten von gleicher Höhe und ähnlich gleicher Grundfläche gleich.

69. Lehrs. Ein senkrechtes, aber dabey nicht rechtwinklichtes, Parallelepipedon ist einem rechtwinklichten von gleicher Höhe und gleicher Größe der Grundfläche gleich.

Zus. 1. Man sieht, wie jedes schiefe, und auch jedes zwar senkrechte, aber nicht rechtwinklichte, Parallelepipedon in ein rechtwinklichtes verwandelt werden könne. Und hieraus ergiebt sich allgemein: Parallelepipeda von gleicher Höhe und gleichem Inhalte der Grundfläche sind gleich.

Zus. 2. Zwey senkrechte Parallelepipeda von gleichen, aber nicht ähnlichen Grundflächen und verschiedener Höhe verhalten sich wie ihre Höhen.

70 Augabe. Jedes Parallelepipedon auszumessen.

Zusaz 1. Da man finden wird, daß jedes Parallelepipedons Inhalt ein Product seiner Länge, Breite und Höhe, nach einerley Maaßstab gemessen, ist: so verhält sich also, wenn P, p zwey Parallelepipeda, und L, l, B, b, H, h diese ihre respective Dimensionen bedeuten, $P:p = LBH:lbh$. Es versteht sich, daß in jedem nicht rechtwinklichten Parallelepipedo diese Dimensionen durch Herablassung der erforderlichen Lothe erst ausgemacht werden müssen. Ferner sey das gemeinschaftliche Maaß m, und dieses sey in L, B, H, A, C und D mal, eben so a, c und dmal in l, b, h enthalten: so ist $P:p = ACDm^3 : acdm^3$, also

$$P = \frac{ACDm^3}{acdm^3} . p \text{ und } p \; \frac{acdm^3}{ACDm^3} . P.$$

Zus. 2. Sind P und p ähnlich, so ist $P:p = L^3 : l^3 = B^3 : b^3 = H^3 : h^3$.

Zusaz 3. Parallelepipeda verhalten sich im zusammengesezten Verhältnisse des Inhalts ihrer Grundflächen und ihrer Höhen. Nemlich $P:p = LBH:lbh = (LB:lb + H:h)$. Ferner Parallelepipeda von gleichem Inhalte der Grundflächen verhalten sich wie die Höhen, und von gleichen Höhen wie die Grundflächen; $LBH:lbh$ ist im erstern Falle $= H:h$, im zweyten $= Lb:lb$. Ist $P = p$, so ist $LB:h = lb:H$.

Zusaz 4. Sind a, b, c, d vier proportionirte Linien, also $a:b = c:d$ und A, B, C, D vier darauf errichtete ähnliche Parallelepipeda, so ist auch $A:B = C:D$. Sind a, b, c, d im stetigen Verhältnisse, also $a:b = b:c = c:d$, so ist $A:B = a:d$.

71. Lehrs. Ein dreyeckichtes Prisma ist halb so groß als ein viereckichtes, das mit ihm einerley Höhe und eine noch einmal so große Grundfläche hat.

Zusaz

Zusaz 1. Man löset hiernach die Aufgabe auf: jedes dreyeckichte, und jedes vieleckichte Prisma, und selbst eben Cylinder auszumessen. Eines jeden dieser Cörper Inhalt ist ein Product seiner Grundfläche mit seiner Höhe.

Zus. 2. Hier finden in Ansehung der Prismatum eben die Behauptungen statt, welche in den Zusäzen des 70 §. von Parallelepipedis erwiesen worden. Bey zwey Cylindern eräugnen sich, wenn ihre Höhen H und h, und ihre Durchmesser D und d heißen, folgende Verhältnisse: $C : c = \frac{HD^2P}{4} : \frac{hd^2P}{4}$ (über den Werth von P sehe man §. 56.) $= HD^2 : hd^2$, oder $C : c = (H : h + D^2 : d^2)$. Also, wenn $D = d$, $C : c = H : h$ und wenn $H = h$, $C : c = D^2 : d^2$. Ist $C : c$, so ist $H : h = d^2 : D^2$.

Zusaz 3. Eines senkrechten Cylinders krumme Seitenfläche ist HDP.

Zus. 4. Sind zwey Cylinder ähnlich, so ist $C : c = 1 : \left(\frac{h}{H}\right)^3$ oder $1 : \left(\frac{d}{D}\right)^3$. Nemlich weil $H : h = D : d$, so ist erstlich, wenn man alle Glieder quadrirt, $H^2 : h^2 = D^2 : d^2$, und durch gleiche Multiplication homologer Glieder mit einerley Factor $H^3 : h^3 = HD^2 : hd^2$, woraus sich die angeführte Formel ergibt.

Zus. 5. Man kann aus dem Inhalte zweyer Cylinder von gleicher Höhe aber verschiedener Basis, $\frac{HD^2P}{4} + \frac{Hd^2P}{4} = (D^2 + d^2) \cdot \frac{HP}{4}$, die Grundfläche eines einzigen ihnen an Inhalt gleichen Cylinders von gleicher Höhe finden, nemlich $\sqrt{(D^2 + d^2)}$ ist dieser Grundfläche Durchmesser.

Zus. 6. Man ersieht, wie ein cylindrischer Ring, und ein hohles Prisma — Cörper, welche in Ansehung eines Cylinders und eines Prisma eben das sind, was im 56. §. Zus. 10. ein

Ring

Ring in Ansehung der Kreisfläche war, — berechnet werden können.

72. Lehrs. I. Fällt das die Höhe einer Pyramide messende Loth so in die Mitte ihrer Grundfläche, daß der Durchschnittspunct desselben mit dieser Grundfläche von allen Scheiteln der Grundlinien gleich weit entfernt ist, so ist die Pyramide gleichseitig, d. i. alle Eckseiten derselben sind gleich. Heißt nemlich ihre Höhe H, und jene Entfernung von jedem Scheitelpuncte R, so ist jede Eckseite $\sqrt{(H^2 + R^2)}$. Ist aber das erstere nicht, so ist auch das letztere nicht, und die Pyramide ist ungleichseitig. II. Der Schnitt einer Pyramide, welchen eine mit ihrer Grundfläche gleichlaufende Ebene verursacht, ist nicht nur dieser Grundfläche parallel und ähnlich, sondern es ist auch, wenn man das dadurch oben abgeschnittene Stück der Pyramide mit der ganzen Pyramide vergleicht, jedes gleichliegende Seiten- oder Linienpaar, H und h, R und r mit eingeschlossen, mit einem

nem gleichliegenden Grundlinienpaar proportionirt. III. Das in I und II behauptete findet auch bey Kegeln statt, und man sieht theils, was die Benennung gleichseitige und ungleichseitige Kegel sagen wolle, theils, daß jeder Kegel als eine Pyramide von unzählig vielen Eckseiten und Seitenflächen angesehen werden könne.

Jeder sieht, daß h und r in II eben das bedeuten in dem obern Pyramidenstücke, was H und R in I in der ganzen Pyramide waren; nur merke man: ist die Pyramide, und also auch das obere Stück nicht gleichseitig, so zeigen hier R und r in beyden Grundflächen gleichliegende Linien vom Lothpuncte nach einer und eben derselben Eckseite an.

Zus. 1. Ist bey einer gleichseitigen Pyramide die Grundfläche zugleich eine regelmäßige Figur, so sind alle Seitenflächen gleich groß. Man kann ferner das die Höhe einer Pyramide messende Loth als ihre Axe ansehn, und die Pyramide,

nach

nach Art der Kegel, bald senkrecht bald schief nennen; senkrecht nur in dem eben angeführten Falle, in jedem andern schief. Also alle senkrechten Pyramiden sind gleichseitig, nicht aber alle gleichseitigen senkrecht. Ferner die senkrechte Pyramide hat lauter gleichschenklichte und dabey gleiche Dreyecke, die blos gleichseitige zwar auch lauter gleichschenklichte aber nicht lauter gleiche Dreyecke zu Seitenflächen. Die schiefe Pyramide kann nie gleiche Eckseiten haben, aber sie kann eben so gut eine regelmäßige Figur zur Grundfläche haben, als die senkrechte sie haben muß.

Zus. 2. In einer senkrechten Pyramide sind alle Lothe, welche aus ihrer Spize auf ihre Grundlinien gefällt werden, gleich und alle Seitenflächen haben einerley Neigungswinkel gegen ihre Grundfläche.

Zus. 3. Jede Ebene durch die Axe einer senkrechten Pyramide theilt dieselbe in zwey ähnlich gleiche Hälften.

Zusaz 4. Jn mehrere Grundseiten eine senkrechte Pyramide hat, desto mehr nähert sie sich einem senkrechten Kegel, und eine senkrechte Pyramide von unzähligen Grundseiten geht gleichsam in einen senkrechten Kegel über.

Zus. 5. Heißt die Grundfläche und Höhe der ganzen Pyramide G und H, des obern Stücks g und h, so ist $G : g = H^2 : h^2$ folglich $g = \frac{G \cdot h^2}{H^2}$. Hat die Pyramide noch einen eben solchen etwas niedrigern (um x niedrigern) Schnitt, dessen Höhe $h + x$ und Grundfläche γ heiße, so ist $\gamma = \frac{G \cdot (h + x)^2}{H^2}$.

Zus. 6. Jedes Kegels Durchschnitt, welcher der Grundfläche gleichlaufend ist, ist ein Kreis, der seinen Mittelpunct in der Axe des Kegels hat.

Zus. 7. Gleichseitige Kegel sind immer senkrecht, ungleichseitige nie. Jst h eines senk-

rech-

rechten Kegels Axe und Höhe, r ein Radius der Grundfläche, so ist jede Seite des Kegels $\sqrt{(h^2 + r^2)}$.

Zusaz 8. Jedes Dreyeck durch die Axe eines Kegels theilt denselben in 2 Theile, und zwar den gleichseitigen in 2 gleiche Theile. Bey einem gleichseitigen Kegel sind alle diese Dreyecke gleichschenklicht und ähnlich gleich.

Zus. 9. Auch ist bey dem gleichseitigen Kegel der Winkel, welchen 2 von den Enden eines und ebendesselben Durchmessers seiner Grundfläche nach der Kegelspize sich erhebende Eckseiten oben in dieser Spize machen, entweder $<$ R oder $=$ R oder $>$ R (R hier ein rechter Winkel), jenachdem h (Höhe des Kegels) $>$ r (ein Halbmesser der Grundfläche) $=$ r oder $<$ r ist; und es erklärt sich, was ein spizwinklichter, oder ein rechtwinklichter, oder endlich ein stumpfwinklichter gleichseitiger Kegel sagen wolle.

Zus. 10. Man kann durch gehörige Verlängerung zweyer solcher Eckseiten eines gegebenen

nen Kegels über seiner Spize einen zweyten ihm ähnlich gleichen Kegel beschreiben.

73. Lehrs. I. Wenn man im 5 Zus. des des vorigen §. γ unendlich nahe bey g, also x unendlich klein, denkt, so enthält eine Pyramide eine unzählige Anzahl solcher Pyramidenstücke, als das zwischen γ und g enthalten ist. II. Das Pyramidenstück zwischen γ und g kömmt, je kleiner x angenommen wird, an Inhalt desto näher einem Prisma auf γ oder auf g von gleicher Höhe, so daß, wenn x unendlich klein ist, jenes Pyramidenstück dem Prisma auf γ oder g gleich zu sezen ist.

Beweis: Das erste lehret der Augenschein; das zweyte wird so dargethan. Unläugbar ist bey gleichem x das Pyramidenstück zwischen γ und g kleiner als das Prisma auf γ, und größer als das auf g; folglich ist es von keinem dieser beyden Prismatum, von γ zum Beyspiel, um so viel unterschieden, als das andere, g, von demselben verschieden ist. Beyder Prismatum

zum Unterschied aber, und das Verhältniß dieses Unterschiedes zu einem derselben, zum kleinern g etwa, erhellt aus folgendem: des größern Inhalt ist γx, des kleinern gx; also ihr Unterschied $\gamma x - gx$, und das Verhältniß dieses Unterschiedes zum kleinern $\gamma x - gx : gx$; dies ist aber nach 72. 5 $\left(x . \frac{G.(h+x)^2}{H^2} - x . \frac{G.h^2}{H^2}\right) : x . \frac{G.h^2}{H^2}$ und dies ist $2hx + x^2 : h^2$; ein Verhältniß, welches offenbar einen sehr kleinen, oder gar als nichts anzusehenden, Unterschied anzeigt, wenn x sehr klein, oder auch unendlich klein angenommen wird. Von dem Unterschiede des Pyramidenstücks muß dies aber unter eben den Voraussezungen um desto mehr wahr seyn, da er noch geringer ist. Man kann also das Pyramidenstück zwischen γ und g, wenn x unendlich klein ist, $= xg = x . \frac{Gh^2}{H^2}$ sezen.

Zus. Das in II behauptete und eben erwiesene läßt sich von einem ähnlichen Kegelstücke dar-

darthun, wenn man, was eben Prismata mit jedesmal bestimmter Seitenzahl waren, als Cylinder d. i. als Prismata von unzählig vielen Seiten ansieht.

74. Lehrsaz. Alle Pyramiden oder Kegel, welche ähnlich gleiche Grundflächen und gleiche Höhen haben, sind gleichen Inhalts.

75. Augabe. I. Jede Pyramide; II. Jeden Kegel; III. Jede abgekürzte Pyramide, und jeden abgekürzten Kegel abzumessen.

Zus. 1. Man ersiehet aus der Auflösung, daß jede Pyramide und jeder Kegel den dritten Theil eines Prisma ausmachen, welches mit ihnen eine gleiche Grundfläche und gleiche Höhe hat.

Zus. 2. Da $\frac{1}{3}$ HG den Inhalt jeder ganzen Pyramide, und $\frac{1}{3}$ hg den Inhalt jedes oberen Stücks derselben angiebt, so ist die abgekürzte Pyramide, als der zwischen G und g enthaltene Cörper, $= \frac{1}{3}\,HG - \frac{1}{3}\,hg$

=

$$= \frac{1}{3} Gh - \frac{1}{3} G \frac{h^2}{H^2} h = \frac{1}{3} G . (H - \frac{h^2}{H^2} h).$$

Gesezt das obere Stück der Pyramide fehlte, und H, h wäre also nicht bekannt, so ist doch $H - h$ oder die Höhe der abgekürzten Pyramide, welche ה heißen mag, und irgend ein gleichliegendes Grundlinienpaar L und l in G und g bekannt, und man erhält für den Inhalt der abgek. Pyr. auf folgende Art eine bequeme Formel: $\text{ה} = H - h$, also $h = H - \text{ה}$; nun ist aber (72. 5) $\frac{h^2}{H^2} = \frac{g}{G}$, also $\frac{h}{H} = \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{G}}$, und daher $h = \frac{H\sqrt{g}}{\sqrt{G}}$, folglich ist $H \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{G}} = H - \text{ה}$ und daher $H\sqrt{g} = H\sqrt{G} - \text{ה}\sqrt{G}$, also $\text{ה}\sqrt{G} = H\sqrt{G} - H\sqrt{g}$, oder $\text{ה}\sqrt{G} = H.(\sqrt{G} - \sqrt{g},)$ woraus $H = \frac{\text{ה}\sqrt{G}}{\sqrt{G} - \sqrt{g}}$ folgt; weil nun $h = \frac{H\sqrt{g}}{\sqrt{G}}$ oder $= H \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{G}}$ war, so ist $h = \frac{\text{ה}\sqrt{G}}{\sqrt{G} - \sqrt{g}} . \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{G}} = \frac{\text{ה}\sqrt{g}}{\sqrt{G} - \sqrt{g}}$.

Durch diese eben gefundenen Werthe von H und h, und durch das ebenfalls ausgemachte $\frac{h^2}{H^2} = \frac{g}{G}$, wird in $\frac{1}{3}$ G. $(H - \frac{h^2}{H^2} h)$ der leztere Factor $H - \frac{h^2}{H^2} h = \frac{\text{ה}\sqrt{G}}{\sqrt{G} - \sqrt{g}} - \frac{g\text{ה}\sqrt{g}}{G(\sqrt{G} - \sqrt{g})} =$; indem man die Brüche auf einerley Nenner bringt, $\frac{G\text{ה}\sqrt{G} - g\text{ה}\sqrt{g}}{G(\sqrt{G} - \sqrt{g})} = \frac{\text{ה}(G\sqrt{G} - g\sqrt{g})}{G(\sqrt{G} - \sqrt{g})}$, folglich wird $\frac{1}{3}$ G. $(H - \frac{h^2}{H^2} h) = \frac{1}{3}\text{ה}\frac{G\sqrt{G} - g\sqrt{g}}{\sqrt{G} - \sqrt{g}}$ eine nur dann bequeme Formel, wenn G und g vollkommene Quadrate sind. Darum multiplicire man Zähler und Nenner des Bruchs $\frac{G\sqrt{G} - g\sqrt{g}}{\sqrt{G} - \sqrt{g}}$ mit $\sqrt{G} + \sqrt{g}$ so wird er $=$

$$\frac{G^2 - g\sqrt{G}\sqrt{g} + G\sqrt{G}\sqrt{g} - g^2}{G - g} =$$

$$\frac{G^2 - g^2 + (G - g) \cdot \sqrt{Gg}}{G - g} =,$$ weil $G^2 - g^2 = (G + g) \cdot (G - g)$, $G + g + \sqrt{Gg}$; folg-

folglich die Formel $\frac{1}{3}ה\frac{G\sqrt{G}-g\sqrt{g}}{\sqrt{G}-\sqrt{g}} = \frac{1}{3}ה.(G+g+\sqrt{Gg})$, ein schon weit bequemerer Ausdruck, weil $\sqrt{Gg}$ rational seyn muß, wenn H, h, G und g rational sind. Jeder zu befürchtenden Unbequemlichkeit hilft man aber so ab: $G;g = L^2 : l^2$, also $g = \frac{Gl^2}{L^2}$ und $Gg = \frac{G^2\, l^2}{L^2}$, folglich $\sqrt{Gg} = \frac{Gl}{L}$; demnach $\frac{1}{3}ה.(G+g+\sqrt{Gg}) = \frac{1}{3}ה.(G+\frac{l^2}{L^2}G+\frac{l}{L}G = \frac{1}{3}הG\left(1+\frac{l}{L}+\frac{l^2}{L^2}\right)$, welcher letztere Ausdruck offenbar der bequemste zur Angabe des Inhalts einer abgekürzten Pyramide ist. Beyspiel. Wenn einer dreyeckichten Pyramide Grundlinien 24, 20 und 20 sind, und $H = 72$, $h = 18$, $ה = 54$: so sieht man theils leicht ein, daß $G = 192$, theils, daß g die Grundlinien 6, 5, 5, habe und $= 12$ sey. Alsdenn ist der ganzen Pyramide Inhalt

4608;

4608; der des obern Stücks 72; folglich der der abgekürzten Pyramide $4536 = \frac{1}{3} \sqcap G \left(1 + \frac{l}{L} + \frac{l^2}{L^2}\right) = 18 \cdot 192 \cdot \frac{21}{16} = \frac{1}{3} \sqcap (G + g + \sqrt{Gg}) = 18 (192 + 12 + 48)$; aber $\frac{1}{3} \sqcap \frac{G\sqrt{G} - g\sqrt{g}}{\sqrt{G} - \sqrt{g}}$ giebt in 18. $\frac{19^2 \sqrt{192} - 12\sqrt{12}}{\sqrt{192} - \sqrt{12}}$ einen nur durch Annäherung zu berechnenden Inhalt.

Zus. 3. Wenn man die Formeln $\frac{1}{3}$ GH $\frac{1}{3}$ gh, und $\frac{1}{3} \sqcap (G + g + \sqrt{Gg})$ bey Kegeln und abgekürzten Kegeln anwendet, kann man G, g und $\sqrt{Gg}$ aus ihnen wegschaffen. Nemlich $G = R^2 P$ und $g = r^2 P$, folglich $\sqrt{Gg} = RrP$; also ist z. B. $\frac{1}{3} \sqcap (G + g + \sqrt{Gg}) = \frac{1}{3} \sqcap P . (R^2 + r^2 + Rr)$.

76. Aufgabe. Den Inhalt der Seitenflächen einer Pyramide auszurechnen.

Auflösung. Wenn die Grundlinien L, l, λ u. s. w., und die senkrechten Linien, aus der

Spize

Spize in jeder Seitenfläche auf die Grundlinie gefällt, K, k, $\varkappa$, u. s. w. heißen: so ist der Inhalt der Seitenflächen $\frac{LK + lk + \lambda\varkappa}{2}$ u. s. w.

Zusaz 1. In einer senkrechten Pyramide ist nach 72. 1. 2 nicht nur $L = l = \lambda$ u. s. w. sondern auch $K = k = \varkappa$, folglich, sind die Seitenflächen $= \frac{NLK}{2}$, wenn die Grundfläche ein Neck ist.

Zus. 2. Die krumme Fläche eines senkrechten Kegels ist $\frac{PDK}{2}$, das ist PRK, und K ist $\sqrt{(R^2 + H^2)}$.

Zus. 3. Die krumme Fläche eines abgekürzten senkrechten Kegels ist $PRK = Prk$ d. i. $P.(K-k).(R+r)$. Läßt man nemlich R und r zwey parallele Halbmesser seyn, und zieht zwey Linien von den beyden Endpuncten des Halbmessers r nach R, die eine vom Mittelpunct

zu Mittelpunct, die andere mit ihr gleichlaufend: so ergibt sich $R - r : K - k = R : k$, und eben so $R - r : K - k = r : k$; folglich ist $K = \frac{R.(K - k)}{R - r}$ und $k = \frac{r.(K - k)}{R - r}$; demnach ist $PRK - Prk = \frac{PR^2.(K - k) - Pr^2.(K - k)}{R - r} = \frac{(P.(K - k)).R^2 - r^2)}{R - r} P.(K - k).(R + r)$. Beyspiel. $R = 12$, $H = 16$, $K = 20$, $r = 6$, $h = 8$, $k = 10$, P, um eine mühsame Rechnung zu vermeiden $= 3{,}14$. Ganz richtig ist $PRK - Prk$, das ist $(3{,}14.12.20) - (3{,}14.6.10.)$ oder $565{,}2 = 3{,}14.10.18$ oder $P.(K - k).(R + r)$.

Zus. 4. Aus $R : r = K : k$ erhellet, wenn $K - k$ unendlich klein ist, so ist auch $R - r$ unendlich klein, und folglich $R + r$ als $2R$ anzusehen. Demnach ist eines solchen un-

unendlich schmalen abgekürzten senkrechten Kegels krumme Fläche $= P.(K-k).2R = 2PR(K-k)$.

77. Lehrs. I. Ein Kugelschnitt, das ist ein Durchschnitt einer Ebene mit einer Kugel ist immer eine Kreisebene, oder ein Kreis, dessen Umfang in der Kugelfläche liegt. II. Alle Kugelschnitte, oder Kreise also, durch den Mittelpunct der Kugel, sind dem Kreise gleich, dessen Hälfte die Kugelfläche beschrieben hat, und demnach alle gleich; auch halbirt jeder derselben die ganze Kugel. III. Kreise, welche Kugelschnitte sind, sind desto größer, oder desto kleiner, je näher sie dem Kugelmittelpuncte, oder je entfernter sie von ihm sind. Die Kreise durch den Mittelpunct sind und heißen daher die größten Kreise; in gleicher Entfernung vom Mittelpuncte sind Kugelschnitte gleich.

Zus. 1. Das aus dem Mittelpuncte der Kugel auf den Kreis herabgelassene Loth fällt in des leztern Mittelpunct, und das aus diesem Mittelpuncte errichtete geht durch

jenen; kurz die Linie zwischen Kugel und Kreismittelpunct steht senkrecht auf dem Kreise.

Zus. 2. Eine grade Linie kann eine Kugelfläche nur in 2 Puncten schneiden; und zwey sich schneidende Kreise schneiden sich nur, was die Kugelfläche anbetrift, in zwey Puncten derselben.

Zusaz 3. Die beyden Puncte, in welchen die im Mittelpunct auf einem Kreise senkrecht stehende Linie, bey erforderlicher Länge, die Kugelfläche schneidet, heißen des Kreises Pole. Daher fällt das aus einem Pole auf einen Kreis herabgelassene Loth stets in dessen Mittelpunct. Unter eines Kugelschnitts Axe versteht man diesen Durchmesser von Pole zu Pole; unter der Axe einer Kugel jeden ihrer Durchmesser.

Zusaz 4. Jeder der beyden Pole eines Kreises ist von allen Puncten desselben, d. i. von den Puncten seines Umfanges auf der Kugelfläche,

fläche, gleich weit entfernt. Umgekehrt, wenn ein Punct der Kugelfläche von allen Puncten eines Kreises gleich weit entfernt ist, so ist er ein Pol dieses Kreises.

Zus. 5. Größte Kreise schneiden sich immer einander, und halbiren sich; Kreise, welche sich einander halbiren, sind größte Kreise.

Zus. 6. Ein Kreis durch die Pole eines andern steht senkrecht auf ihm, und ist ein gröster Kreis; also ein senkrecht auf einem andern stehender, und dabey gröster, Kreis geht durch des andern Pole; folglich geht von zwey grösten senkrecht auf einander stehenden Kreisen jeder durch des andern Pole.

Zus. 7. Die Bogen zweyer oder mehrerer grösten Kreise, durch die Pole eines dritten, von einem und eben demselben Pole bis zum Durchschnittspuncte mit dem dritten in der Kugelfläche sind alle gleich.

Zus. 8. Eine Ebene senkrecht auf dem Endpuncte eines Kugeldurchmessers hat mit der Kugel, oder Kugelfläche, nur dies einzige Element gemeinschaftlich, und ist ihr also das, was dem Cirkel, oder Cirkelumfange, di Tangente ist. Unter einem Lothe auf einem gegebenen Puncte einer Kugelfläche versteht man ein Loth auf dieser berührenden Ebene in ihrem Berührungspuncte, also jenen Durchmesser und seine Fortsezung außer der Kugel.

78. Lehrs. I. Alle eine Kugel schneidende Parallelkreise, d. i. deren Ebenen gleichlaufend sind, haben einerley Pole. II. Zwey durch die beyden Pole mehrerer Parallelkreise gelegte gröste Kreise schneiden von denselben lauter ähnliche Bogen ab, d. i. Bogen, von welchen jeder zu seinem Kreisumfange eben das Verhältniß hat, welches einer der übrigen zu seinem Kreisumfange hat, kurz Bogen von gleichen Graden, Minuten und Secunden u. s. w.

Zus. 1. Bey zwey grösten senkrecht auf einander stehenden Kreisen ist der Bogen des

einen zwischen dem andern Kreise und dessen Pole ein Quadrant.

Zus. 2. Der Winkel, dessen Maaß alle in II angeführte Bogen sind, ist der Neigungswinkel des einen grösten Halbkreises gegen den andern.

Zus. 3. Ziehet man an einen der beyden Durchschnittspuncte zweyer gröster Kreise, zwey Tangenten, wovon die eine den einen Kreis, die andere den andern berühre, so bilden diese Tangenten den Neigungswinkel der beyden Kreise.

Zus. 4. Diesen Neigungswinkel zweyer gröster Kreise nennt man ihren sphärischen Winkel; dieser ist also der krummlinichte Winkel, welchen sie bey ihrem Durchschnittspuncte auf der Kugelfläche machen. Er ist dem im 3ten Zusaze beschriebenen geradlinichten Winkel gleich, und sein Maaß ist jeder Bogen, welchen die grösten Kreise von irgend einem Kreise, durch dessen

Pole sie gehen, abschneidet; man wählt aber gewöhnlich hiezu den grösten Kreis, durch dessen Pole sie gehen, und der wiederum durch ihre Pole geht, wo denn jeder der beyden Bogen der grösten Kreise selbst bis zu seinem Durchschnittspuncte mit diesem dritten grösten Kreise, und also bis zur Abschneidung des Bogens, welcher des sphärischen Winkels Maaß ist, einen Quadranten ausmacht.

Zus. 5. Sphärische Scheitelwinkel, und sphärische Nebenwinkel sind, wie geradlinichte, jene gleich, diese = 2 R.

Zus. 6. Man sieht, wie man einen grösten Kreis durch zweyer anderer grösten Kreise Pole setzen kann.

Zus. 7. Ein solcher dritter gröster, durch zweyer gröster Kreise Pole gesetzter, Kreis gehet also durch vier Pole; von jedem der beyden Kreise liegt ein Pol auf dieser, und einer auf jener Seite. Man wird finden, 1. daß jeder Pol des einen Kreises auf der einen Seite von dem des andern auf eben

der Seite um so viele Grade entfernt sey, als des sphärischen Winkels Maaß ausmache; 2. von dem Pole des einen auf der einen Seite bis zu dem Pole des andern auf der andern sey eine Entfernung von 2 R — das Maaß des sphärischen Winkels.

79. Lehrsaz. Die Kugelfläche ist 4 PR^2, wenn P das aus 56. bekannte, und R den Halbmesser der Kugel bedeutet.

Zus. 1. Die Kugelfläche verhält sich zu einem grösten Kreise wie 4 : 1.

Zus. 2. Die Kugelfläche ist der krummen Fläche eines senkrechten Cylinders gleich, dessen Durchmesser 2 R und Höhe 2 R ist.

Zus. 3. Kugelflächen verhalten sich zu einander wie R^2 zu r^2.

Zus. 4. Ein Stück der Kugelfläche CAB abgeschnitten von der ganzen Fläche durch einen Kreis oder Kugelschnitt AB, dessen Pole und Axe C, D

sind, C in dem Kugelstücke, D außer demselben, durch welche Pole C, D ein gröster AB in A und B schneidender Kreis gelegt ist, dies Kugelstück hat an Inhalt seiner krummen Oberfläche P . (CB^2), d. i. es ist einem Kreise gleich, welcher von der Sehne CB als seinem Halbmesser beschrieben wird.

80. Lehrs. Der cörperliche Inhalt jeder Kugel ist $\frac{4PR^3}{3} = \frac{PD^3}{6}$.

Zus. 1. Das Kugelstück CAB im 79 §. 4 Zus. ist, wenn wir die Entfernung des Pols C von dem Mittelpunct des Kreises AB, welche gleichsam die Höhe des Stückes ist (s. 66. 5), H, und R — H, welcher Rest gleichsam die Höhe des Complements von CAB zu einer Halbkugel ist, h nennen, dieses Kugelstück CAB ist an cörperlichem Inhalt = $\frac{2}{3}HP$ ($R^2 - h^2 - Rh$). Man sieht, je mehr sich das Stück einer Halbkugel nähert, desto größer wird H, und desto kleiner h; ist es die ganze Halbkugel, so ist H = R und h = o, und die Formel verwandelt sich in die der Halbkugel $\frac{2PR^3}{3}$.

Zus.

Zus. 2. Der cörperliche Inhalt zweyer Kugeln verhält sich zu einander wie R^3 zu r^3, d. i. Kugeln stehen zu einander in dreymal so großem Verhältnisse als ihre Halb- und Durchmesser.

Zus. 3. Aus dem Inhalt einer Kugel, S, findet man $R = \sqrt[3]{(6 S . 0{,}31830988..)}$; nemlich aus $S = \frac{1}{6} P . D^3$ folgt $D^3 = \frac{S}{\frac{1}{6}P} = \frac{6S}{P} = \frac{1}{P} . 6S.$

Zus. 4. $\frac{4PR^3}{3} : 4PR^2$, das heißt der Kugelinhalt, dividirt durch ihre Oberfläche, ist $= \frac{1}{3} R$; man kann daher die Kugelfläche als eine unendliche Anzahl unendlich kleiner Ebenen ansehen, welche Ebenen die Grundflächen unzähliger Pyramiden sind, die alle in der Kugel Mittelpunct ihre Spize haben.

Zus. 5. Der Würfel auf der Kugel Durchmesser verhält sich zur Kugel, wie

3 : 1,57079632; nemlich $D^3 : \frac{1}{6} P D^3 = 1 : \frac{1}{6} P = 3 : \frac{1}{2} P$.

Zus. 6. Ein Cylinder, eine Kugel und ein Kegel verhalten sich, wenn der erstere und der leztere Cörper den Durchmesser der Kugel D zum Durchmesser, und D zur Höhe haben, wie 3, 2, 1.

81. Aufgabe. Nach Anleitung der gefundenen Formeln die Cörper theils zu cubiren, das heißt sie in Würfel zu verwandeln, theils sonst in einander zu verwandeln.

Die ebene Trigonometrie.

82. Erklärungen. Die trigonometrischen Linien, nach welchen man die unbekannten Seiten und Winkel eines geradlinichten Dreyecks bestimmt und berechnet, sind der Sinus und Cosinus, s und cs, der Sinus versus (Quersinus) und Cosinus versus, sv und csv, die Tangente und Cotangente, t und ct, und endlich die Secante und Cosecante, sc und csc. Nennt man in der ersten Figur

Figur den spitzigen Winkel bac, und den ihn messenden Bogen bc, x, ferner den bc, oder x, zu einem Quadranten ergänzenden Bogen cd, d. i. den Ergänzungsbogen von x, und zugleich den bac, oder x, zu einem rechten Winkel ergänzenden Winkel cad, d. i. den Ergänzungswinkel von x, nennt man beydes R — x; ist nun im Quadranten badcb, ce auf ba, und cf auf da, auch bg in b auf ba, und dh in d auf da senkrecht, und dabey ac bis g und h verlängert: so ist ce der s.x (d. i. der Sinus des Winkels x, und des ihn messenden Bogen x) und zugleich der cs. R — x; cf ist der cs.x, u. zugl. der s. R—x; be ist der sv.x, und zugl. der csv. R — x; df ist der csv. x; und zugl. der sv. R — x, bg ist die t.x und zugl. die Ct. R — x; dh ist die Ct. x und zugl. die t. R — x; ag ist die sc. x und zugl. die csc. R — x; endlich ist ah die csc. x und zugl. die sc. R — x. Aus diesem Beyspiele ersieht man von selbst, was die trigonometrischen Linien bey einem spizen Winkel für Linien sind.

Zus.

Zus. 1. Der Sinus eines spizigen Winkels, oder eines Bogens unter 90° ist immer der halben Sehne des doppelten Bogens gleich; ist demnach $x = 30°$, so ist $s.x = \frac{1}{2} r$. Ist $x = 45°$, so ist $t.x = r$, nemlich wenn $bag = 45°$, so ist auch $bga = 45°$; folglich $bg = ba$, oder $t.x = r$.

Zus. 2. $ce + df$, d. i. $s.x + csv.x = r$, auch $be + cf$, d. i. $sv.x + cs.x = r$. Ferner ist $cs.x : s.x = r : t.x$; nemlich $ae : ec = ab : bg$; nun ist aber $ae = cf$; folglich erhellt das besagte. Ebenfalls $s.x : cs.x = r : ct.x$, weil $ce = fa$, und $fa : fc = da.dh$, auch ist $cs.x : r = r : sc.x$, weil $ae : ac = ab : ag$; und $s.x : r = r.csc.x$, weil $af : ac = ad : ah$.

Zusaz 3. Man kann daher alle trigonometrischen Linien durch eine, z. B. durch $s.x$ bestimmen; so ist $cs.x = \sqrt{(r^2 - s.x^2)}$; $sv.x = r - \sqrt{(r^2 - s.x^2)}$; $csv = r - s.x$;

$$t.x = \frac{r.s.x}{\sqrt{(r^2 - s.x^2)}}; \; ct.x = \frac{r.\sqrt{(r^2 - s.x^2)}}{s.x}$$

$$sc.x = \frac{r^2}{\sqrt{(r^2 - s\,x^2)}}; \text{ endlich } csc.x = \frac{r^2}{s.x}.$$

Zusaz 4. Mit dem Zunehmen und Wachsen des spizigen Winkels x, wächst zugleich sein Sinus zwischen den Gränzen o und r, sein Sinus versus zwischen eben den Gränzen, seine Tangente zwischen o und ∞ (das Zeichen des Unendlichen), und seine Secante zwischen r und ∞; hingegen nimmt zugleich sein cs und csv zwischen den Gränzen r und o ab, seine Ct zwischen ∞ und o, und seine csc zwischen ∞ und r. Eines rechten Winkels oder eines Bogens von 90° s ist demnach = r, sv = r, t = ∞, sc = ∞, cs = o, csv = o, Ct = o, csc = r. Alle diese Behauptungen werden außer dem Augenscheine, den die Figur gewährt, von den Säzen im zweyten und dritten Zusaze erhärtet.

83. Lehrs. Auch bey stumpfen und selbst bey auswärts gehenden Winkeln, kurz bey allen Bogen, lassen sich die trigonometrischen Linien bestimmen. So ist I. des stumpfen Winkels bak, oder des Bogens bcdk = 2 R — x (x in der Bedeutung des 82. §. = Bogen bc)

Sinus

Sinus km = ce; bm ist sv . 2R − x = be + 2 cs . x; bn = bg ist t . 2 R − x aber negativ wegen der entgegengesezten Richtung; (negativ wird nemlich eine trigonometrische Linie, wenn sie, verglichen mit ihrer Richtung in einem andern Quadranten, in dem sie positiv war, nun von einerley Punct oder doch von einer und ebenderselben Linie aus in einer entgegengesezten Richtung nach ihrem Bogen oder nach ihrem sonst bestimmten Endpunct geht); an = ag ist sc . 2 R − x, ebenfalls negativ; fk = fc ist der negative cs . 2 R − x; df = df ist csv. 2 R − x; do = dh ist die negative Ct. 2 R − x, und ao = ah ist die positive csc. 2 R − x. II. Im dritten Quadranten ist − pm = ce oder s . 2 R + x, nemlich Bogen bcdp = 2 R + x angenommen; sv. 2 R + x ist bm = be + 2 . cs . x; t . 2 R + x ist bg = bg; sc . 2R + x ist − ag = ag; cs . 2 R + x ist − pr = cf; csv . 2 R + x ist dr = df + 2 . s . x; Ct . 2 R + x ist dh = dh, und csc. 2 R

+

+ x ist − ah = ah. III. Endlich ist im 4ten Quadranten des Bogens bcdlpgi = 4 R − x Sinus − ie = ce, sv ist be = be, t ist − bn = bg, sc ist an = ag; cs ist ir = cf; csv ist dr = df + 2 . s. x; Ct ist − do = dh, und die csc ist − ao = ah.

Zus. 1. Also haben die Bogen x, 2R − x, 2R + x, und 4 R − x an Größe einerley trigonometrische Linien, den sv im 2ten und 3ten Quadranten, und den csv im 3ten und 4ten Quadranten ausgenommen, von welchen der erstere um das zwiefache des cs. x, und der leztere um das zwiefache des s. x größer ist, als eben dieselben Linien bey dem Bogen x sind; folglich kann man auch bey allen diesen Bogen, mit gehöriger Aufmerksamkeit auf die eben angezeigten 4 Fälle, die trigonometrischen Linien durch eine einzige nach den Formeln des 3ten Zus. im 82 §. bestimmen.

Zus. 2. Die Behauptungen und Proportionen des zweyten Zus. des vorigen §. sind

auch hier richtig, und führen ebenfalls auf die bald positive, bald negative Eigenschaft der trigonometrischen Linien.

Zusaz 3. Folgendes Schema stellt das Zu- (z.) oder Abnehmen (a.) der trigon. Linien zugleich mit dem Wachsen des Bogens, nebst den Gränzen dieses Zu- oder Abnehmens, wie auch die positive oder negative Eigenschaft der trigon. Linien in allen 4 Quadranten vor.

Vierter.
- a. (r u. o)
- a. (r u. o)
- a. (∞ u. o)
- a. (∞ u. r)
- z. (o u. r)
- a. (2r u. r)
- z. (o u. ∞)
- z. (r u. ∞)

Zus. 4. Da der Sinus eines Bogens zwar zweymal = r, aber nie grösser als r ist: so nennt man r den Sinus totus (st), und man pflegt nach diesem r oder Sinus totus alle übrigen Sinusse und alle trigonometrische Linien als nach einem gemeinschaftlichen Maaßstabe zu schäzen und zu bestimmen.

84. Lehrs. Die gleichnamigen trigonometrischen Linien gleicher Winkel in verschiedenen Kreisen, oder, welches mit dem gesagten einerley ist, ähnlicher Bogen, verhalten sich zu einander wie die Halbmesser der Kreise.

Zusaz. Die in den Zus. des 82 §. und im 83 §. nebst seinen Zus. vorgetragene Säze behalten stets ihre Richtigkeit, r habe welchen Werth es wolle. Sind nemlich s und S, wie t und T, trigonometrische Linien ähnlicher Bogen, so folgt aus $S : s = t : T$ auch $S : T = s : t$.

85. Aufgabe. Die übrigen trigonometrischen Linien eines spizigen Winkels nach ei-

ner andern, als nach s bestimmen, z. B. nach t, oder nach sv.

Auflösung. Da $t = \frac{rs}{\sqrt{(r^2 - s^2)}}$; so ist $t^2 = \frac{r^2\, s^2}{r^2 - s^2}$, folglich $t^2 . r^2 - t^2 . s^2 = r^2 . s^2$, also $r^2 . s^2 + t^2 . s^2 = t^2 . r^2$; demnach $s^2 = \frac{t^2\, r^2}{r^2 + t^2}$, und daher $s = \frac{t . r}{\sqrt{(r^2 + t^2)}}$ Beyspiel. Ist bey dem Halbmesser 1 die Tangente $1\frac{1}{3}$, so ist der Sinus $\frac{4}{5}$, wie ihn auch die Sinustafeln angeben. Eben so folgt aus $sv = r - \sqrt{(r^2 - s^2)}$, $sv - r = - \sqrt{(r^2 - s^2)}$, $r - sv = \sqrt{(r^2 - s^2)}$, $(r - sv)^2 = r^2 - s^2$, $s^2 - r^2 = -(r - sv)^2$, $s^2 = r^2 - (r - sv)^2$, $s = \sqrt{(2rsv - sv^2)}$. Ein Beyspiel wäre $r = 1$, $sv = 0{,}2$, wo $s = 0{,}6$ ist; alsdenn ist $cs = 0{,}8$; welche beyde trigonometrische Linien man auch in den Tafeln als Linien eines und ebendesselben Bogens finden wird. — Auch nach jeder sonstigen

gen trigonom. Linie lassen sich alle übrige bestimmen.

86. Erklärungen. Sinustafeln, oder Sinus- und Tangententafeln, sind solche Tafeln, worin die Grössen der trigonometrischen Linien, nemlich gewöhnlich nur der Sinusse, Cosinusse, Tangenten und Cotangenten, für jeden Grad von 0° bis 90°, und dessen Unterabtheilungen, nach einer für den Sinus totus vestgesezten Grösse berechnet enthalten sind. Sie sind theils Tafeln der natürlichen, theils der künstlichen Sinusse, oder theils natürliche theils künstliche Tafeln; jenes, wenn sie die Verhältnisse der angeführten trigonometrischen Linien zu ihrem Sinus totus in natürlichen Zahlen, dieses, wenn sie dieselben in gemeinen oder Briggischen Logarithmen angeben.

Unter Vorzeigung solcher Tafeln, z. E. der Vegaischen (s. §. 41. Zus. 2. ersten Abth.) erklärt man leicht ihre Einrichtung und ihren Gebrauch.

Zusaz. Man ersieht leicht aus §. 84 wie Tafeln, worin die Sinus totus verschiedene Werthe haben, zu vergleichen sind.

87. Aufgabe. Aus den bekannten trigonometrischen Linien zweyer Bogen, deren Summe unter 90°, die Formeln für die trigonometrischen Linien des Unterschiedes und der Summe dieser beyden Bogen zu finden.

Auflösung. I. Nennt man des größern Bogens Sinus und Cosinus S und CS, des kleinern s und cs, so ist die Formel für den Sinus des Unterschiedes $sU = \frac{S.cs - s\ CS}{r}$ also in Tafeln, worin der Sinus totus = 1, $S.cs - s.CS$.

Beweis. Wenn bc (2te Fig.) der kleinere und bd der größere Bogen ist, so hat man aus ce, ea, df und fa, dg zu suchen. Die Dreyecke aec, afh und dgh sind ähnlich; also $ae : ec = af : fh$; fh demnach $= \frac{ec\ .\ af}{ae}$

=

$= \frac{s \,.\, CS}{cs}$; also $dh = S - fh = S - \frac{s \,.\, CS}{cs}$; ferner $ac : ae = dh : dg$, oder $r : cs = S - \frac{s \,.\, CS}{cs} : dg$; also dg, oder $sU = \frac{S \,.\, cs - s \,.\, CS}{r}$. Sind die Bogen gleich, so ist auch nach der Formel $sU = o$.

II. Die Formel für den Sinus der Summe oder des Aggregats (sA) zweyer Bogen ist $sA = \frac{s \,.\, CS + S \,.\, cs}{r}$.

Beweis. Aus ce und ea (= s u. cs) nebst dg und ga (= S u. CS) ist $sA = df = dh + hf$ zu suchen. Es ist $cs : r = S : dh$; folglich $dh = \frac{rS}{cs}$; ferner $cs : s = S : gh$; $gh = \frac{sS}{cs}$; $ha = CS - \frac{sS}{cs}$; $r : s = CS - \frac{sS}{cs} : hf$; $hf = \frac{sCS}{r} - \frac{s^2S}{rcs}$; folglich $sA = dh + hf = \frac{rS}{cs} + \frac{sCS}{r} - \frac{s^2S}{rcs} =$

$$= \frac{r^2S - s^2S}{rcs} + \frac{sCS}{r} = \frac{(r^2 - s^2)S}{rcs} + \frac{sCS}{r}$$

nach 82. 3 $= \frac{Scs + sCS}{r}$. Es erhellet, daß wenn die Bogen gleich sind, sA (jezt Sinus des doppelten Bogens) $= \frac{2S.CS}{r}$ oder $\frac{2s.cs}{r}$ sey. III Die Formel für den Cosinus des Unterschiedes ist $cs.U = \frac{cs.CS + sS}{r}$ Beweis. 1. Schon aus der Formel in I. $sU = \frac{S.cs - s.CS}{r}$ läßt sich diese Formel für cs.U herleiten. Nemlich nach 82. 3 ist $r^2 = S^2 + CS^2$, und $cs.U^2 = r^2 - sU^2$, also

$$csU^2 = \left\{ \begin{array}{l} S^2 \qquad\qquad\qquad\qquad + CS^2 \\ \text{abgez.}\ \frac{S^2Ss^2 - 2SsCScs + CS^2s^2}{r^2} \end{array} \right\}$$

oder beyde Theile als Zähler, zu denen der Nenner r^2 gehört, dargestellt

csU²

$$csU^2 = \begin{pmatrix} r^2S^2 & & & + \; r^2CS^2 \\ \text{abgez.} \; cs^2S^2 & - & 2SsCScs & + \; s^2CS^2 \end{pmatrix} : r^2$$

$$csU^2 = ((r^2 - cs^2)\, S^2 + 2\, SsCScs + (r^2 - s^2)\, CS^2) : r^2$$

$$csU^3 = (s^2S^2 + 2\, SsCScs + cs^2\, CS^2) : r^2$$

hieraus die Quadratwurzel gezogen gibt $csU = \frac{sS + csCS}{r}$. 2. Fast noch leichter erhält man die Formel durch folgende aus der Figur hergeleitete Schlüsse: cs. U = ag = ah + hg:

$cs : r = CS : ah ; ah = \frac{r \,.\, CS}{cs}$; dh ist aus I $=$

$S - \frac{sCS}{cs}$; $r : s = S - \frac{sCS}{cs} : hg$; $hg =$

$\frac{sS}{r} - \frac{s^2CS}{r \,.\, cs}$; $csU = ag = ah + hg =$

$\frac{r \,.\, CS}{cs} - \frac{s^2CS}{r \,.\, cs} + \frac{sS}{r} = \frac{r^2CS - s^2CS}{r \,.\, cs} +$

$\frac{sS}{r} = \frac{(r^2 - s^2)CS}{r \,.\, cs} + \frac{sS}{r} = \frac{cs^2CS}{r \,.\, cs} + \frac{sS}{r} =$

$\frac{csCS + sS}{r}$. Sind die Bogen gleich, so ist

$cs \,.\, U = \frac{cs^2 + s^2}{r} = \frac{r^2}{r} = r$, wie er nach 83:3

seyn muß.

IV. Für den Cosinus der Summe ist die

Formel $csA = \frac{CS \,.\, cs - Ss}{r}$. Beweis. 1.

$csA^2 = r^2 - sA^2$; $r^2 = S^2 + CS^2$; $sA^2 =$

$S^2cs^2 + 2SsCScs + CS^2s^2$;

$$csA^2 = \left(S^2 \text{ abgez. } (cs^2S^2 + 2SsCScs + s^2CS^2) : r^2 + CS^2\right)$$

$$csA^2 = \left((r^2S^2 + r^2CS^2) : r^2 \text{ abgez. } (cs^2S^2 + 2SsCScs + s^2SC^2) : r^2\right)$$

$$csA^2 = \frac{(r^2 - cs^2)\,S^2 - 2SsCScs + (r^2 - s^2)CS^2}{r^2};$$

$$csA = \frac{s^2S^2 - 2SsCScs + cs^2CS^2}{r^2};$$

$$csA^2 = \frac{-sS + csCS}{r} \text{ und } \frac{sS - csCS}{r};$$

also csA hat zwey Werthe, von welchen aber bey der im §. angenommenen Voraussezung, daß

$A < 90°$ seyn soll, nur der erstere gelten kann. Bey dieser Voraussetzung nemlich muß csA durchaus bejahend seyn (83.3); nun aber würde $\frac{sS - csCS}{r}$ verneinend werden, weil bey Bogen, deren Summe $< 90°$ seyn soll, nie $cs = S$ und zugleich $CS = s$, und auch nie $cs < S$ und $CS < s$ seyn können, da im ersten Fall die Summe der Bogen $= 90°$, und im andern $> 90°$ seyn würde. Folglich da durchaus $cs > S$ und $CS > s$, so gilt hier nur der erste Werth, weil er allein etwas positives für csA gibt. 2. In II ist $ha = CS - \frac{sS}{cs}$; $r : cs = CS - \frac{sS}{cs} : af$ oder csA; folglich $csA = \frac{CScs - sS}{r}$. Also csA, wenn die Bogen gleich sind, $= \frac{cs^2 - s^2}{r} = \frac{r^2 - 2s^2}{r} = r - \frac{2s^2}{r}$ (wo r und s allein zur Bestimmung hinreichen)

$= r - \frac{2.(r^2 - cs^2)}{r} =$ (wo r und cs nur zur Findung des csA erforderlich sind) $r - 2.(r - \frac{cs^2}{r})$. Im Fall $r = 1$, so ist csA bey zwey gleichen Bogen noch einfacher $= cs^2 - s^2 = 1 - 2 . s^2$, (weil $cs^2 = 1 - s^2$) $= 2 - 2 s^2 - 1 =$ (weil $2 - 2 s^2 = (1 - s^2 + 1 - s^2) = 2 cs^2$) $2 cs^2 - 1$. V. Die Formel für die Tangente der Summe ist $t. A| = \frac{t . S + t . s}{1 - t . S . t . s}$. Beweis. Nach 82. 2 . 3 ist $t . A = \frac{sA}{cs A}$, also $t . A = \frac{Scs + sCS}{CScs - Ss}$. Man dividire Zähler und Nenner durch CScs, so ist der erstere $\frac{S}{CS} + \frac{s}{cs} = t . S + t . s$, und der leztere $1 - \frac{Ss}{CScs} = 1 - t . S . t . s$, folglich $tA = \frac{tS + ts}{1 - tS . ts}$. Für den doppelten Bogen ist tA =

$= \frac{2 \,.\, ts}{1 - ts^2}$; nemlich tA ist hier $\frac{2s \,.\, cs}{cs^2 - s^2}$, und dies mit cs^2 im Zähler und Nenner dividirt gibt das eben angeführte. Eben so wird die Formel für die Tangente des Unterschiedes $tU = \frac{tS - ts}{1 + tS.ts}$ berechnet; nemlich $tU = \frac{sU}{csU} =$

$$\frac{Scs - sCS}{CScs + sS} = \frac{tS - ts}{1 + tS.ts}.$$

Zus. 1. Mit gehöriger Rücksicht auf die bald positive bald negative Natur der trigonometrischen Linien lassen sich alle diese Formeln auf so große Bogen, als man will, anwenden.

Zus. 2. Man findet nach $csA = 1 - \frac{2s^2}{r}$ in II die Formeln für die Aufgaben aus den trigonometrischen Linien eines ganzen Bogens die der halben Bogen zu finden. So ergibt sich I. $s\frac{1}{2}A$. Nemlich $csA = r - \frac{2s^2}{r}$; $\frac{2s^2}{r} = r - csA$; $\frac{2s^2}{r} = svA$ (82. 3);

$s^2 -$

$s^2 - r . \frac{1}{2} svA$; $s = \sqrt{(r . \frac{1}{2} svA)}$, und im Falle $r = 1$, ist s oder $s\frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{1}{2}} svA$. Man findet II. $cs\frac{1}{2}A$ auf folgende Art: csA

$$= r - 2 . \left(r - \frac{cs^2}{r}\right); \; 2 \frac{cs^2}{r} = r + csA;$$

$cs^2 = \frac{1}{2} (r + r . csA)$; also cs oder $cs\frac{1}{2}A =$ $\frac{\sqrt{r^2 = r\, csA}}{2}$, und im Falle $r = 1$, $=$ $\frac{\sqrt{1 + csA}}{2}$. III. Die Tangente $\frac{1}{2}$ A ist $=$ $\frac{\sqrt{r^2 - r . csA}}{r^2 + r cs A}$, im Falle $r = 1$ $=$

$$\frac{1 - cs A}{1 + cs A} = \frac{t . A}{sc . A + 1} = \frac{sec\ A - 1.}{t . A}$$

Die beyden ersten Formeln ergeben sich durch folgende Schlüsse: $t . \frac{1}{2} A = \frac{s . \frac{1}{2} A}{cs . \frac{1}{2} A}$; $s \frac{1}{2} A =$ $\frac{\sqrt{r . svA}}{2}$; aber svA ist nach 82. 3 $r - csA$; also $s\frac{1}{2} A = \frac{\sqrt{r^2 - r . csA}}{2}$, folglich $t \frac{1}{2} A$

$= \frac{\sqrt{r^2 - r\,cs\,A}}{r^2 + r\,cs\,A}$, und wenn $r = 1$, $=$ $\frac{\sqrt{1 - cs\,A}}{1 + cs\,A}$. Zu den beyden übrigen Formeln, wenn $r = 1$, leitet folgendes Verfahren:

$t\,\frac{1}{2}\,A = \frac{\sqrt{1 - cs\,A}}{1 + cs\,A}$; also $t\,\frac{1}{2}\,A^2 =$ $\frac{1 - cs\,A}{1 + cs\,A}$; aber $sc A$ ist nach 82 : 3 $=$ $\frac{1}{cs A}$ und also $cs A = \frac{1}{sc A}$; folglich $t\,\frac{1}{2}\,A^2 =$

$\frac{1 - \frac{1}{sc.\,A.\,2}}{1 + \frac{1}{sc.\,A.\,2}} = \frac{sc\,A - 1}{sc\,A + 1}$; indem man nun Zähler und Nenner mit $sec\,A + 1$, oder $sec\,A - 1$ multipliciret, erhält man $t\,\frac{1}{2}\,A^2 =$ $\frac{t\,.\,A^2}{(sc\,A + 1)^2}$ (weil tA nach 82 . 2 . 3 auch $\sqrt{(sc\,A^2 - 1)}$ folglich $t\,A^2 = sc\,A^2 - 1$), oder $\frac{(sc\,A - 1)^2}{tA^2}$; folglich $t\,\frac{1}{2}\,A = \frac{tA}{sc\,A + 1}$,

oder

oder $\frac{scA - 1}{tA}$, die verlangten beyden Formeln.

Zusaz 3. Folgende Resultate aus den Formeln in I und II, und in III und IV, nemlich in II und III ist, wenn $r = 1$,

$sA = S . cs + s CS$, und
$sU = S . cs - s Cs$, also

Summe $= 2 S . cs$
Unterschied $= 2 sCS$ und in III und IV ist
$csU = csCS + s S$, und
$csA = cs CS - s S$, also

Summe $= 2 cs CS$
Unterschied $= 2sS$ — diese Resultate sind nicht selten vortheilhaft für eine genauere und leichtere Rechnung nach den künstlichen Sinustafeln.

88. Lehrs. In einem rechtwinklichten Dreyecke verhält sich 1) die Hypotenuse zu einer Kathete wie r zu dem der Kathete entgegengesetzten Winkel, und auch wie r zu dem Cosinus des zwischen ihnen enthaltenen Winkels; wornach

man aus diesen beyden Seiten die schiefen Winkel und die zweyte Kathete findet; 2) Die eine Kathete zur andern, wie r zur Tangente des zwischen der erstern und der Hypotenuse enthaltenen Winkels, wornach man aus beyden Katheten die schiefen Winkel und hierauf die Hypotenuse findet.

Zusaz. Man kann sowohl aus der Hypotenuse und einem schiefen Winkel die beyden Katheten, als auch aus einer Kathete und einem schiefen Winkel die andern beyden Seiten finden.

89. Lehrs. Für ein gleichschenklichtes Dreyeck abc, (s. 3te Fig.) worin cd senkrecht auf ab ist, und Winkel acb, x heißt, hat man folgende 3 Formeln, um aus den bekannten Seiten die Winkel, und aus den Winkeln und einer bekannten Seite die andere zu finden; I. $\sin \frac{1}{2} x = \frac{r \cdot \frac{1}{2} ab}{ac}$; II. $ac = \frac{r \cdot \frac{1}{2} ab}{\sin \frac{1}{2} x}$

III. $\frac{1}{2} ab = \frac{ac \cdot \sin \frac{1}{2} x}{r}$

90. Lehrsaz. In jedem Dreyecke verhalten sich die Seiten wie die Sinus der gegenüberstehenden Winkel; man kann also aus einer Seite und zweyen Winkeln die beyden übrigen Seiten, und aus zwey Seiten und einem der einen gegebenen Seite gegenüberstehenden Winkel die beyden übrigen Winkel und die dritte Seite finden.

Zusaz. In dem lezteren Falle muß auch, wenn der gegebene Winkel spizig, und von den beyden gegebenen Seiten die ihm gegenüberstehende kleiner als die an ihm liegende ist, auch hier noch bestimmt werden, wie im 23. §, ob ein stumpfwinklichtes, oder ein spizwinklichtes Dreyeck gesuchet werden soll, weil unter den angegebenen Umständen beydes möglich ist.

91. Lehrs. In jedem Dreyecke (s. 4te Fig.) abc verhält sich ab + ac zu ab — ac, wie t. $\frac{1}{2}$ (x + y) zu t. $\frac{1}{2}$ (x — y), wenn man W. acb, x, und W. abc, y nennt; d. i. die Summe zweyer Schenkel verhält sich zu ih-

ren Unterschiede, wie die Tangente der halben Summe der beyden Winkel an der Grundlinie zu der Tangente des halben Unterschiedes eben dieser Winkel.

Beweis. Nimm ad = ac, ziehe ae auch = ac; ziehe ferner ec und cd: so ist cd senkrecht auf ec oder ecd = R, weil man sich ecd als einen Peripheriewinkel in einem aus a mit ad beschriebenen Halbkreise vorstellen kann. Ferner eac, als äußerer Winkel am Dreyecke acb, $= x + y$, auch eac, eben so mit Rücksicht auf das Dreyeck acd betrachtet, = acd + adc; aber acd = adc, weil Dr. adc gleichschenklicht ist; also eac $= x + y = 2$ acd = 2 adc; folglich acd und adc jedes $= \frac{1}{2}(x + y)$, und dcb = acb − acd $= x - \frac{1}{2}(x + y) = \frac{1}{2}(x - y)$. Auf die verlängerte ec lasse man bf aus b senkrecht: so ist bf der cd parallel, und ef und eb sind durch diese beyden proportionirt geschnitten, auch ist, wenn man bf als 1 betrachtet, fe des Winkels abf,

und

und cf des Winkels cbf Tangente; aber W. abf = adc = $\frac{1}{2}$ (x + y) und W. cbf = dcb = $\frac{1}{2}$ (x − y).

Demnach ef : cf = eb : db;
das ist, t. abf : t. cbf = ab + ac : ab − ac;
auch t. abf : t. cbf = t. $\frac{1}{2}$ (x + y) : t. $\frac{1}{2}$ (x − y);
also ab + ac : ab − ac = t. $\frac{1}{2}$ (x + y) : t. $\frac{1}{2}$ (x − y).

Zusaz. Man findet nach diesem §. aus 2 Seiten und ihrem eingeschlossenen Winkel die beyden übrigen Winkel, und so die dritte Seite.

92. Aufgabe. Aus den Seiten eines Dreyecks die Winkel zu finden.

93. Aufgaben. Wenn man den Sinus totus = 1 sezt, in einem Dreyecke, (s. 5te Fig.) welches 2 Halbmesser, ab = ac = H, mit der Sehne, S = bc, machen, indem man bac den Winkel am Mittelpuncte W nennt, I. Aus zwey bekannten Dingen von H, S und W das dritte zu finden.

Auflösung. Wenn man das Loth ad = L fällt, so hat man nach §. 89. $H = \frac{\frac{1}{2} S}{s. \frac{1}{2} W} = \frac{1}{2} S . csc. \frac{1}{2} W$, weil nach 82 . 3. $csc. \frac{1}{2} W = \frac{1}{s. \frac{1}{2} W}$ ist; ferner $S = 2 H . s. \frac{1}{2} W$; $s. \frac{1}{2} W = \frac{S}{2 H}$, woraus man W berechnen

kann.

kann. II. Für den Inhalt des Dreyeck bac, J. eine Formel zu finden, worin J. blos durch H und W bestimmt ist. Auflösung. $J = \frac{1}{2} L. S$; aber L ist $= H . cs \frac{1}{2} W$, denn $1 : cs \frac{1}{2} W = H : L$; (auch ist $L = \frac{1}{2} S$ Ct. $\frac{1}{2} W$, weil (82 . 2) $\frac{1}{2} S : L = 1 :$ Ct. $\frac{1}{2} W$); ferner ist im Dreyecke bac, $S : H = s . W : s . bca$; weil aber $s\ bca = ad = cs . \frac{1}{2} W$, so ist dieß

$$S : H = sW : cs . \frac{1}{2} W, \text{ und}$$

$$\text{im Dr. bda ist } H : \tfrac{1}{2} S = 1 : s . \tfrac{1}{2} W$$

folglich $1 : \frac{1}{2} = s . W : cs \frac{1}{2} W . s . \frac{1}{2} W$; also $s . W = 2 . cs \frac{1}{2} W . s \frac{1}{2} W$. Demnach $J = \frac{1}{2} LS = \frac{1}{2} H . cs \frac{1}{2} W . 2 H . s \frac{1}{2} W = \frac{1}{2} H^2 . sW$, die verlangte Formel. III. Den Ausschnitt baceb und den Abschnitt bdceb durch H und W zu bestimmen. Auflösung. Man ersieht aus 59 . 6 . 7 . 8., daß Ausschnitt bac $= \frac{1}{2} H^2 W$, und Abschnitt bdceb $= \frac{1}{2} H^2 . (W - s . W)$ ist, wenn man W nach dem 6ten Zus. daselbst gleichnamig mit dem Sinus totus $=$ 1 ausdrückt. IV. Aus der Höhe des Bogens

(h)

(h) = de und der Sehne S, die beyden übrigen Größen H und W zu finden.

Auflösung. $h : \frac{1}{2} S = \frac{1}{2} S : 2 H - h$ (s. §. 57. 3), also $2 H - h = \frac{\frac{1}{4} S^2}{h}$; $2 H = h + \frac{\frac{1}{4} S^2}{h}$; $H = \frac{1}{2} h + \frac{S^2}{8 h}$. Ferner H war oben $\frac{\frac{1}{2} S}{s. \frac{1}{2} W}$; also $\frac{1}{2} h + \frac{S^2}{8 h} = \frac{\frac{1}{2} S}{s. \frac{1}{2} W}$; demnach $s. \frac{1}{2} W = \frac{\frac{1}{2} S}{\frac{1}{2} h + \frac{S^2}{8 h}} = \frac{4 h S}{4 h^2 + S^2}$. Oder auch $H = \frac{1}{2} S . csc. \frac{1}{2} W$; also $\frac{1}{2} S . csc \frac{1}{2} W = \frac{1}{2} h + \frac{S^2}{8 h}$; $csc \frac{1}{2} W = \frac{\frac{1}{2} h + \frac{S^2}{8 h}}{\frac{1}{2} S} = \frac{4 h^2 + S^2}{4 h S}$. Beyspiel $h = 1$, $S = 6$, so ist $H = 5$, und $W = 73^{\circ}, 44', 23'', 15'''$. Eine andere Auflösung der Aufgabe W aus h und S zu finden; W. bec = ½ B. bfc = ½. (360°

$(360^\circ - $ W. bec$) = \frac{1}{2}(360^\circ - W)$; folglich W. bed $= \frac{1}{2}$. W. bec $= \frac{1}{4} . (90^\circ - W)$ $= 90^\circ - \frac{1}{4} W$; nun ist bd des W. bed Sinus, und ed eben desselben Cosinus, folglich ist der Sinus des Ergänzungswinkels (82), oder s. $\frac{1}{4} W = ed = h$, und cs $\frac{1}{4} W = bd$ $= \frac{1}{2} S$; aber nach 82.2 ist cs $\frac{1}{4} W :$ s. $\frac{1}{4} W$ $= 1 :$ t. $\frac{1}{4} W$, d. i. $\frac{1}{2} S : h = 1 :$ t. $\frac{1}{4} W$, demnach t. $\frac{1}{4} W = \frac{h}{\frac{1}{2} S}$. In dem gegebenen Beyspiele ist dies 0,33333333, und giebt $\frac{1}{4} W$ $= 18^\circ, 26', 5'', 48''', 38^{\text{v}}$; W also $73^\circ, 44', 23'', 14''', 32^{\text{v}}$ um keine halbe Tertie verschieden von oben V. 1. Die Seite eines regelmäßigen in einem Kreise beschriebenen Vielecks durch H, oder H durch die gegebene Vielecksseite bestimmen; auch den Inhalt zweyer verschiedener in einem und eben demselben Kreise beschriebener Vielecke unter einander vergleichen. Auflös. Das Vieleck heiße Neck, so ist W = $\frac{360}{N}$; die Vielecksseite ist das entweder gegebene

bene oder zu suchende S, und man wendet obige Formeln an. 2. Inhalt eines Necks ist offenbar (s. II) $N . \frac{1}{2} H^2 . s . \frac{360}{N}$, und der eines Mecks $= M . \frac{1}{2} H^2 s. \frac{360}{M}$; folglich jener zu diesem wie $N . s . \frac{360}{N}$ zu $M . s . \frac{360}{M}$.

94. Lehrs. Nennt man (s. 6te Fig.) die Seiten eines Dreyecks L, M, N, l, m, n, nemlich l die dem Winkel L, m die dem W. M und n die dem W N entgegenstehende Seite, so ist $cs M = \frac{l^2 + n^2 - m^2}{2 ln}$ und $s . M =$

$$\frac{\surd((l+m+n).(l+m-n).(l+n-m).(n+m-l))}{2\,l\,n}$$

Beweis. $m:l = s.M : s.L$ (90.) und $m : n = s.M : sN$; daher ist $sL = \frac{l.s.M}{m}$ und $s.N = \frac{n.s.M}{m}$. Ferner ist, weil

weil $L = 180° - (M + N)$, nach 83. 1. $s.L = s(M + N)$, also $s.L = sM.csN + sN.csM$ (87. II.), und, indem man für sL und s.N das eben gefundene sezt $\frac{l.sM}{m} = sM.csN + \frac{n.sM}{m}.csM$; daher $\frac{l}{m} = csN + \frac{n}{m}.csM$, oder $l = m.cs.N + n.csM$. Hieraus folgt weiter $l - n.csM = m.csN$, und, indem man alles quadrirt, $l^2 - 2.ln.csM + n^2 cs.M^2 = m^2.csN^2$, aber $cs.M^2$ ist, indem der Sinus totus 1 ist, $= 1 - s.M^2$, und $csN^2 = 1 - sN^2$, und so ist das leztere $= 1 - \frac{n^2.s.M^2}{m^2}$, daher $l^2 - 2l.n.csM + n^2 - n^2sM^2 = m^2 - n^2s.M^2$; $l^2 - 2ln.csM + n^2 = m^2$; $-2ln.csM = m^2 - l^2 - n^2$; $2ln.csM = l^2 + n^2 - m^2$; demnach ist $csM = \frac{l^2 + n^2 - m^2}{2ln}$, wie der Lehrsaz behauptete. Jeder siehet, daß diese Formel,

wenn

wenn das Dreyeck gleichschenklicht ist, entweder $= \frac{2l^2 - m^2}{2l^2}$, d. i. $1 - \frac{m^2}{2l^2}$, oder $= \frac{l^2}{2ln}$ werde, ist das Dreyeck gleichseitig, so ist

$$csM = csL = csN = \frac{l^2}{2l^2} = 0,5.$$

Aus dieser Formel für csM berechnet und beweiset man die für sM angegebene folgendermaßen: $sM^2 = 1 - csM^2 = (1 + cs\,M)$.

$$(1 - csM) = \frac{(2ln + l^2 + n^2 - m^2).(2ln - l^2 - n^2 + m^2)}{4 l^2 n^2}$$

Im Zähler dieses Bruches ist der erste Factor ein Product aus den Factoren $l + n + m$ und $l + n - m$, und der zweyte Factor ein Product aus den Factoren $m + n - l$, und $m - n + l$; demnach ist

$$sM^2 = \frac{(l + n + m) \cdot (l + n - m) \cdot (l + m - n) \cdot (n + m - l)}{4\, l^2 n^2}; \text{ also}$$

$$sM = \frac{\sqrt{((l + n + m) \cdot (l + n - m) \cdot (l + m - n) \cdot (n + m - l))}}{2\, l\, n};$$

 ist

Ist das Dreyeck gleichschenklicht, und sind l und n diese gleichen Seiten, so ist $sM =$

$$\frac{\sqrt{((2\,l + m) \,.\, (2\,l - m) \,.\, m^2)}}{2\,l^2} =$$

$$\frac{m\sqrt{((2\,l + m) \,.\, (2\,l + m))}}{2\,l^2};$$ ist das Dreyeck gleichseitig, so hat man $sM =$

$$\frac{\sqrt{(3\,l^4)}}{2\,l^2} = \frac{l^2\sqrt{3}}{2\,l^2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{3} = 0{,}8660254.$$

Zus. 1. Jede Seite eines Dreyecks wird durch die beyden andern, und den zwischen ihnen enthaltenen Winkel so bestimmt, daß sie die Wurzel aus der Summe der Quadrate der beyden übrigen Seiten ist, wenn vorher von dieser Summe das doppelte Produkt, welches diese beyden Seiten mit dem Cosinus des zwischen ihnen enthaltenen Winkels machen, abgezogen worden ist; nemlich aus $l^2 - 2\,l\,n . csM + n^2 = m^2$ folgt $m = \sqrt{(l^2 + n^2 - 2\,l\,n . csch)}$.

Zus.

Zusaz. 2. Um den Halbmesser eines Kreises aus einer Seite eines Dreyecks, um welches der Kreis zu beschreiben ist, zu erforschen, schließt man also: In diesem Kreise, dessen Halbmesser r heißen mag, ist s M = $\frac{1}{2}$ m; folglich, mit Rücksicht auf obige Formel, wo der Sinus totus = 1 war, ist r:

$$1 = \tfrac{1}{2} m : \frac{m}{2r}, \text{ also } s\,M = \frac{m}{2r} =$$

$$\frac{\sqrt{((l+n+m).(l+n-m))}}{2l}$$

$$\frac{((l+m-n).(n+m-l))}{n}$$ demnach r =

$$\frac{\sqrt{((l+n+m).(l+n-m).(l+m-n).(n+m-l))}}{mln}$$

Zusaz. 3. Auch der Inhalt jedes Dreyecks läßt sich in einer solchen von den Seiten allein an die Hand gegebenen Formel ausdrücken. Nemlich er ist $\frac{1}{2}$ LPl; aber LP ist sM

für

für den Halbmesser n; folglich ist LP in Theilen des Halbmessers oder Sinus totus $= 1$ ausdrückt nsM; also Inhalt des Dreyecks $= \frac{1}{2}$ nl sM $= \frac{1}{4} \sqrt{((l+n+m).(l+n-m).(l+m-n).(n+m-l))}$.

Die sphärische Trigonometrie.

95. Erklärung. Ein sphärisches Dreyeck ABC (s. 7te Fig.) ist ein in den Bogen AB, BC und CA dreyer größter Kreise auf der Kugelfläche als seinen Seiten unter den sphärischen Winkeln (78. 4.) ABC, BCA und CAB eingeschlossenes Dreyeck.

Zus. 1. Man betrachtet nur solche sphärische Dreyecke, in welchen jede Seite $< 180°$ ist, weil von diesen die Schlüsse erforderlichen Falls ohne Mühe auf solche, worin größere Seiten vorkommen, übergetragen werden können. Daher liegt jedes sphärische Dreyeck gänzlich in einer Halbkugel. Man mag sich nemlich, welchen Kreis von den dreyen man will, als

den die Kugel in 2 Halbkugeln theilenden Kreis denken, so müssen sich die übrigen Seiten ganz in einer und eben derselben Halbkugel mit derjenigen Seite befinden, welche der die Kugel in zwey gleiche Hälften theilende Kreis hergibt.

Zus. 2. Zieht man von den Scheiteln der drey Winkel eines sphärischen Dreyecks die Halbmesser AD, BD und CD nach der Kugel Mittelpunkt D, so ist jede Seite des sphärischen Dreyecks der Bogen, welcher zu dem durch die beyden von ihren Enden nach dem Mittelpunkte gezogenen Halbmesser entstandenen geradlinichten Winkel als Maaß gehört. Auch zeigt sich, daß der zwischen der Fläche eines sphärischen Dreyecks und diesen Halbmessern enthaltene Raum eine Art von Pyramide sey; ferner daß die drey Halbmesser am Mittelpunkte einen aus drey geradlinichten Winkeln bestehenden cörperlichen Winkel bilden. Aus dem leztern folgt nach 63 und 64, theils daß die Summe zweyer Seiten eines sphärischen Winkels immer größer ist als die übrige

übrige dritte Seite, theils daß die Summe aller drey Seiten immer kleiner ist als 4 R d. i. als vier Quadranten.

Zus. 3. Die ein sphärisches Dreyeck bildenden Kreise können alle drey senkrecht auf einander stehen, und alsdenn sind alle drey Winkel rechte Winkel, (S. 78. 1.) auch können zwey derselben senkrecht auf dem dritten stehn, ohne selbst senkrecht auf einander zu seyn, und alsdenn hat das sphärische Dreyeck zwey rechte Winkel. Mit Ausschließung dieser beyden Fälle, welche keiner besondern Aufschlüsse bedürfen, theilt man die sphärischen Dreyecke ein in die rechtwinklichten, das ist in diejenigen, welche Einen rechten Winkel haben, und in die schiefwinklichten, d. i. in diejenigen, welche keinen rechten Winkel haben.

Zus. 4. Man nennt in einem sphärischen Dreyecke, wenn B ein rechter Winkel ist, AC die Hypotenuse, und AB und BC die

Perpendikel, oder auch AB das Perpendikel und BC die Grundlinie.

96. Lehrsaz. In einem rechtwinklichten sphärischen Dreyecke ist, wenn B der rechte Winkel ist, I. 1. r : sAC = sC : sAB; oder 2. r : sAC = sA : sCB. II. r : sBC = tC : t AB; oder r : sAB = tA : tBC.

Beweis. I. Nachdem man die Halbmesser AD, BD und CD gezogen, lasse man aus A theils das Loth AE auf die Ebene DBC herab, theils AF senkrecht auf DC, und ziehe FE; so fällt AE auf den Durchschnitt der Ebenen ABD und BDC, weil diese als senkrecht auf einander stehend vorausgesezt worden; AE ist also sADB = sAB; AF ist sADC = sAC; FE ist senkrecht in F auf DC dem Durchschnitte der beyden Ebenen BDC und ADC (S. § 60. Zus. 8.) in der Ebene BDC liegend, und AF senkrecht auf DC in ADC liegend; demnach ist der geradlinichte Winkel AFE der Neigungswinkel beyder eben genannten Ebenen (§. 58.)

und

und also = C; endlich ist AE = sAFE für den Halbmesser AF, weil AE auf BDC, d. i. auf allen Linien in ihr durch E senkrecht steht nach §. 58. Folglich

AF : AE = r : FC; aber auch
AF : AE = sAC : sAB: demnach
r : sC = sAC : sAB, oder
r : sAC = sC : sAB.

2. r : sAC = sA : sCB erhellt aus der 8ten Figur, worin ohne die geringste Aenderung in den Winkeln und Seiten des sphärischen Dreyecks in der 7ten Figur die Winkel C und A blos ihre Namen gewechselt haben, uud hierauf aus A eben dieselben Linien gezogen wurden. Auf diese Weise entsteht wieder : r : FC = sAC : sAB, und dies ist, nach der 7ten Figur ausgedrückt, r : sA = sAC : sCB, oder r : sAC = sA : sCB.

II. Es ist, weil cs:s = r; t (82. 2.), und also s:cs = t:r,

DE:EA = r:t AB, und

EA:EF = tC:r; demnach

DE:EF = tC:tAB; aber auch

DE:EF = r:sBC; also

r:sBC = tC:t AB; woraus

r:sAB = tA:t BC wird durch. Vergleichung der 8ten Figur mit der 7ten.

97. Lehrs. In einem in B den rechten Winkel habenden sphärischen Dreyecke (s. die 9te Fig.) ist ferner III. r:cs AB = cs BC: cs CA. IV. r:cs AB = s A:cs C. V. r:csC = ct CB:ct CA. VI. r:cs CA = tA:ct C.

Beweis. Verlängere die Bogen CB und CA zu Quadranten CD und CE, so steht der durch DE gelegte gröste Kreis, von welchem DE ein Bogen ist, so wohl senkrecht auf CE als auf DC (78. 4.); also sind EDC und DEC rechte Winkel; BA und DE also stehen

beyde

beyde senkrecht auf BC, folglich gehen sie beyde durch dessen Pol; dieser sey F; man verlängere BA und DE bis F, so sind BF und DF ebenfalls Quadranten. So entsteht das neue sphärische Dreyeck AEF, welches das Ergänzungsdreyeck von ABC ist; so wie ABC das Ergänzungsdreyeck von AEF ist. Es ist nemlich ED das Maaß des Winkels C, und DB das Maaß des Winkels F (78. 4.); der Winkel A in beyden, und E in jenem, B in diesem sind gleich; das erstere, weil es Scheitelwinkel sind, (78. 5.) das leztere, weil FEA als Nebenwinkel von DEC ein rechter Winkel ist (78. 5.), wie B. Demnach, um alles zusammen zu fassen, ist, wenn in AEF, als Ergänzungsdreyeck betrachtet, A = A, E = B, F Ergänzung von CB (d. i. CB + F = CB + DB = 90°) FA Ergänzung von AB, AE Ergänzung von AC und EF Ergänz. von C. Aber im Ergänzungsdreyecke AEF, ist nach 96.

r : sAF = sF : sAE,

r : sAF = sA : sFE,

r : sEF = tF : tAE

r : sAE = tA : tEF;

das ist, wenn man die kurz vorher bemerkten Seiten, und den Winkel F, als Ergänzungen von ABC ansieht,

III. r : cs AB = cs BC : cs CA;

IV. r : cs AB = s A : cs C;

V. r : cs C = ct CB : ct CA;

VI. r : cs CA = tA : ct C.

Zusaz 1. Da tx : ty = cty : ctx ist, so lassen sich diejenigen von den 6 Proportionen des 96 und 97 Lehrs. worin entweder zwischen Tangente und Tangente, oder zwischen Cotangente und Cotangente ein Verhältniß angegeben ist, in andere und oft bequemere Proportionen verändern. So wird aus II nun VII r : sBC = ct AB : ct C. und r : sBC = ct BC : ct : A; aus V wird VIII. r : csC = t CA : tCB; und aus VI wird IX. r : cs CA = tC : ct A. Daß aber tx : ty = ct y : ct x sey, erweiset man

aus

aus 82. 2. Man nenne $Ct\,x$, m, und $Ct\,y$, n; so ist $r : m = s\,x : cs\,x$: also $cs\,x = \frac{m\,.\,s\,x}{r}$; eben so ist $cs\,y = \frac{n\,.\,sx}{r}$; nun ist $cs\,x : s\,x = r : t\,x$, d. i. $\frac{m\,.\,sx}{r} : sx$, d. i. $\frac{m}{r} : 1 = r : t\,x$; also $tx = \frac{r^2}{m}$; auf eben die Weise ist $t\,y = \frac{r^2}{n}$ also $m : n = \frac{r^2}{n} : \frac{r^2}{m}$ heißt $Ct\,x : Ct\,y = ty : tx$, woraus sich für die Verwandlung der VI in die VIII Proportion $t\,x : Ct\,y = t\,y : Ct\,x$ ergibt.

Zus. 2. Die eben angeführten Proportionen in VII, VIII und IX lassen sich, weil nach 82 . 3 $tx = \frac{r^2}{Ct\,x}$, und $Ct\,x = \frac{r^2}{tx}$ zum bequemern Gebrauche ferner verwandeln, nemlich VII in X $r : Ct\,C = t\,AB : sBC$, oder $r : Ct\,A = t\,BC : sBC$; VIII in XI $r : Ct$

CA

CA = t CB : csC. und IX in XII r : ctA = ctC : cs CA.

98. Aufgaben. Zu zwey außer dem rechten Winkel unter den Größen der Winkel und Seiten eines rechtwinklichten sphärischen Dreyecks nebst dem Halbmesser bekannten Dingen das jedesmal verlangte dritte zu finden.

Auflösung. I. Mit der Voraussezung, daß keine Seite größer als ein Quadrant sey, geben die Formeln in 96 und 97 gerade zu die Auflösung. So findet man z. B. aus AB = 30°, und C = 40°, daß A = 62°, 11′, 47″, 05‴ nach IV; nemlich r : cs AB = sA : csC, oder cs AB : cs C = r : sA; folglich

$$sA = \frac{csC}{cs\ AB} = \frac{cs\ 40^\circ}{cs.\ 30^\circ} = \frac{0{,}7660444}{0{,}8660254} =$$

0,8845518, also A = 62°, 11′, 47″, 05‴; eben so BC aus AB und C nach II; nemlich r : s BC = t C : t AB; also s BC =

$$\frac{t\ AB}{t\ C} = \frac{t\ 30^\circ}{t\ 40^\circ} = \frac{0{,}5773503}{0{,}8390996} = 0{,}6880593;$$

dem-

demnach BC $= 43^{\circ}, 28', 36'', 03'''$; auch kann man aus AB und A nach II. B finden; nemlich $r : sAB = tA : tBC$; also $tBC = sAB . tA = 0,5 . 1,8963811 = 0,948\,905$; demnach BC wie eben. So mit jedem sonstigen Paare dieser Größen, welches das Dreyeck bestimmet. II. Im Falle sich aber Seiten, oder Winkel, welche größer als 90° sind, in dem Dreyecke befinden, muß jedesmal erst eine nach 83. 3. anzustellende Untersuchung über die Gleichartigkeit der beyden gegebenen Dinge vorhergehen, um darnach die zu findende dritte Größe richtig zu bestimmen, wo die beyden Dinge gleichartig heißen, wenn sie zugleich größer als 90° sind, ungleichartig aber, wenn nur das eine größer als 90° ist. Folgende Beyspiele lehren die Beschaffenheit dieser Untersuchung: Ist in II $C > 90^{\circ}$, so muß auch $AB > 90^{\circ}$ seyn, denn $+ : +$ kann nur $= - : -$ seyn; so ersieht man aus den bey III möglichen Fällen, $+ : - = - : +$, und $+ : - = + : -$, und endlich $+ : + = - :$

—, daß alsdenn, wenn die beyden gegebenen Dinge gleichartig sind, das zu suchende spizig ist, daß aber, wenn jene ungleichartig sind, dieses stumpf ist.

Zusaz. 1. Bey dieser Untersuchung gibt es zwey Fälle, worin die daher entstehende Zweydeutigkeit, daß s. (180° — x) gänzlich, und also auch in der Eigenschaft des Positiven = s. x ist, durch Hülfe einer andern Proportion noch gehoben werden kann. Um nemlich die Hypotenuse aus dem einen Perpendikel und dem diesem entgegengesezten Winkel, und um aus jenen beyden diesen zu finden, oder kürzer im Zeichen, um in I. r : sAC = sC : sAB, AC oder C zu finden, muß man vorher aus r : s BC = tC : tAB in II die Eigenschaft der von C und AB nicht gegebenen Größe aus der Eigenschaft der gegebenen bestimmen. Aber drey Fälle bleiben übrig, worin die Eigenschaft des stumpfen oder spitzigen bey der zu suchenden Größe durchaus vorher angegeben seyn muß:

sie sind, wenn das 4te Glied das zu findende ist, in folgenden 3 Proportionen enthalten:

$$sC : sAB = r : sAC, \text{ aus I};$$
$$csAB : r = csC : sA, \text{ aus IV};$$
$$\text{und } r : tC = tAB : sBC, \text{ aus X.}$$

Zus. 2. Alle Fragen über ein sphärisches Dreyeck, welches zwar keinen rechten Winkel, aber doch eine Seite = 90° hat, lassen sich ebenfalls aus dem bisherigen beantworten. Wenn in der 10ten und 11ten Figur AC = 90°, so mache man auch CD = 90°; alsdenn ist BD entweder = 90° − CB, wie in der 10ten Figur, oder = CB − 90°, wie in der 11ten; AD ist Bogen eines grösten Kreises, und steht, weil C sein Pol ist, sowol auf AC, als auf CD oder CB senkrecht, und ist auch dabey = C; folglich ist ADB ein in D rechtwinklichtes Dreyeck, und DAB im erstern Falle = 90° − CAB, im zweyten = CAB − 90°. Durch die drey Stücke, welche in jedem sphärischen schiefwinklichten Dreyeck gegeben werden, um

daraus das 4te zu suchen, sind hier nun jedesmal zwey in dem rechtwinklichten Dreyecke bestimmt; durch diese zwey sucht man ein drittes in dem rechtwinklichten, welches zu dem verlangten 4ten in dem schiefwinklichten führt. Wäre zum Beyspiel CB aus CA = 90°, AB = 50°, und CAB = 30°, zu suchen, so ist für das rechtwinklichte Dreyeck BAD Winkel BAD = 60° und AB = 50° gegeben; hieraus findet man nach I. BD = 41°, 33′, 38″, 49‴; demnach ist CB = 48°, 26′, 21″, 11‴.

99. Lehrsäze über die Fälle, welche bey einem schiefwinklichten sphärischen Dreyecke statt haben.

I. Zwey Winkel eines solchen Dreyecks sind entweder beyde schief, oder beyde stumpf, oder endlich der eine ist spizig, der andere stumpf. Dieser Saz erfodert darum keinen Beweis, weil er sich auf eine vollständige Angabe aller möglichen Fälle gründet; von allen möglichen muß

der

der jedesmal wirkliche Fall Einer seyn. Wenn in der 12ten Figur BCA = 90° — x und CBA = 90° — y, so sind BAC, bAc, BAc, und bAc, 4 Dreyecke, von welchen in Ansehung der Winkel B, b, C, c, das erste zur ersten; das zweyte zur zweyten, und das 3te und 4te zur dritten Classe gehören; nemlich es ist auch BcA = 90° — x und CbA = 90° — y, weil jener Winkel = BCA, und dieser = CBA; demnach bcA und bCA, jeder = 90° + x, auch cbA und cBA, jeder = 90° + y, als Nebenwinkel der kurz vorher angeführten. Kürze und Deutlichkeit halber heiße ein Dreyeck, welches, wie cAB, zwey spizige Winkel an dem Grunde, d. i. an seiner Seite, auf welcher, oder an dem grösten Kreise, auf welchem die beyden übrigen Seiten gleichsam stehen, hat, SP; eins mit zwey stumpfen Winkeln am Grunde, wie cAb, heiße ST und eins mit ungleichartigen Winkeln daselbst, z. B. BAc und bAC heiße U.

II. Ein Perpendikel aus dem dritten Winkel A, von welchem die Dreyecke nicht auf die eben angeführte Art benannt sind, fällt in SP und ST in diese Dreyecke, in U aber außer diesem Dreyecke. Beweis. Der Pol des Grundes P, durch welchen nebst A der diese Perpendikel bildende gröste Kreis gehen muß, kann nirgends, als zwischen den Schenkeln Ab und Ac liegen, da er 90° von jedem Puncte des Grundes entfernt seyn muß, welches in Hinsicht jedes andern Punctes zwischen Ac und AB, oder AC und Ab, gleich als unmöglich in die Augen fällt. Da nun zwey Puncte auf der Oberfläche einer Kugel die Lage eines grösten Kreises durchaus bestimmen, so kann der durch A und P auf dem Grunde senkrecht stehende weder zugleich durch irgend ein E in Ab oder Ac gehen, noch in b oder c auf den Grund fallen. Folglich muß Ad, oder das Perpendikel in ST durchaus zwischen b und c den Grund treffen, und dies nannten wir in dem Dreyecke ST seyn; alsdenn ist aber Ad auch

durch=

durchaus in SP, weil alle Bögen Bb, Dd, Cc = 180° seyn müssen. Auch sind diese Perpendikel Ad und AD zugleich die Perpendikel jedes der beyden Dreyecke U; ein Dreyeck U hat also 2 Perpendikel, nach jeder Seite hin eins; beyde fallen aber außer dem Dreyecke.

III. Dies Perpendikel ist 1. in SP und 2. in ST gleichartig mit den Winkeln an dem Grunde; also in jenem $< 90°$, in diesem $> 90°$; 3. in U ist es ungleichartig mit dem ihm am nächsten liegenden Winkel. Beweis. Das erstere beweiset die Proportion in 96. II. r : sBC = tC : tAB, welche hier r : sDC = tC : tAD heißt; nach 83. 3 ist sDC immer bejahend, d. i. AD kann nicht anders als $< 90°$ seyn. Das zweyte folgt aus eben dieser Proportion, und ergiebt sich auch daraus, daß AD + Ad = 180° seyn muß; das dritte lehrt der Anblick der Figur hinlänglich.

IV. In SP und ST hängen die Winkel am Grunde, B und C, oder b und c, auf

folgende Art von ihrer Nähe bey D und d ab. 1. B oder C sind am grösten, je näher sie bey D liegen in den Gränzen eines Quadranten, also zwischen DQ oder Dq hingegen b oder c sind in eben den Gränzen zwischen dq oder dQ desto kleiner, je näher sie bey d liegen. Indem also B oder C sich weiter von D nach Q oder q entfernen, und DB oder DC also grösser werden, nehmen sie ab; hingegen nehmen b oder c zugleich mit ihrer Entfernung von d, oder mit dem Grösserwerden des Bogens db oder dc zu. 2. Wenn DB oder DC oder db oder dc noch weiter zunehmen, also grösser als Quadranten werden, und sich ihren respectiven Gränzen (95. 1.) c, b, C, B, immer mehr nähern, nimmt B oder C wieder zu, b aber oder c wieder ab. 3. Jeder dieser vier Winkel ist in seinem höchsten Werthe dem Perpendikel seines Dreyecks gleich. Beweis. Nach 97. VII ist r:sDB = Ct AD:Ct B; folglich ist, wenn r = 1, CtB = sDB . Ct AD. Nun

Nun ist aber sowohl sDB immer bejahend (83. 3), weil DB immer $<$ 180° ist, als auch Ct AD, da Ct D in III. $<$ 90° erwiesen ist. Demnach ist Ct B = sDB. Ct AD auch immer bejahend, das heißt, der Winkel B bleibt immer spitzig, DB sey so lang oder kurz, als es wolle und könne. Ferner wächst sDB, so lange DB zwischen 0 und 90° zunimmt; also je grösser DB zwischen diesen Gränzen wird, desto grösser wird Ct B, das ist nach 83. 3 Winkel B wird desto kleiner; umgekehrt je grösser DB zwischen 90° und 180° wird, desto kleiner wird sDB, also desto kleiner Ct B, und daher B desto grösser. Auf eben die Art erweiset man sowol ebendasselbe von C, also auch das behauptete Gegentheil von b und c; welches leztere auch daraus erhellet, daß CBA + cbA, und eben so BCA + bcA = 180° seyn müssen. Die Behauptung in 3 gründet sich darauf, daß wenn DB = DQ, sDB = 1 ist, demnach Ct B = Ct AD, das ist B = AD.

V. In jedem Dreyecke U nimmt 1. der stumpfe Winkel an dem Grunde zu, bis er sich um einen Quadranten von dem mit ihm ungleichartigen Perpendikel entfernt, alsdenn ist er = 180° — diesen Perpendikel, hierauf nimmt er ab, bis er dem Nebenwinkel des zweyten Winkels an dem Grunde unendlich nahe kommt; 2. Der spizige Winkel an dem Grunde nimmt ab, bis er sich um einen Quadranten von dem mit ihm ungleichartigen Perpendikel entfernt, alsdenn ist er = 180° — diesen Perpendikel, und nimmt hierauf zu, bis er dem Nebenwinkel des zweyten Winkels an dem Grunde unendlich nahe kommt. Beweis. Da W. DBA immer kleiner wird nach IV, je näher B nach Q rückt, so wird cBA, als sein Nebenwinkel desto grösser; u. s. w.

VI. 1. In SP nehmen die auf dem Grunde stehenden Seiten zu, je weiter sie sich von dem Perpendikel entfernen; in der Entfernung eines Quadranten sind sie 90°, vorher

spizig, nachher stumpf. 2. In ST nehmen eben diese Seiten bey eben dieser Veränderung immer ab, sind erst stumpf, im Quadranten 90°, hierauf spizig. 3. In U verhalten sich diese Seiten, indem sie sich von dem mit ihrem Winkel an dem Grunde ungleichartigen Perpendikel entfernen, so, daß die den stumpfen Winkel am Grunde habende Seite immer zunimmt, vorher spizig ist, im Quadranten 90° wird, und nachher stumpf wird, die den spizigen Winkel daselbst bildende Seite aber immer abnimmt, vor dem Quadranten, in welchem sie auch 90° ist, stumpf, nach ihm spizig ist. Beweis. Nach 97. III ist, indem r = 1 gesezt wird, 1 : cs AD = cs DB : cs AB; also cs AB = cs AD . cs DB, woraus nach 83. 3. das in 1. behauptete folgt; und hieraus fließen die in 2 und 3 hinzugefügten Säze.

VII. Man muß, wenn man aus den beyden auf dem Grunde stehenden Seiten und dem einen Winkel an dem Grunde den andern Winkel

kel daselbst suchen soll, in gewissen Fällen auf eine Zweydeutigkeit gerathen. W sey der gegebene Winkel, A die ihm anliegende, G die ihm entgegengesetzte Seite; w heiße der zu suchende Winkel. W und A können auf doppelte Art gleichartig und ungleichartig seyn; G kann bald mit A, bald mit 2 R — A verglichen, größer oder kleiner als jenes oder dieses seyn. Daher folgende Fälle: 1. Nur, wenn G $<$ A bey W $< 90^{\circ}$ und A $< 90^{\circ}$, ist w zweydeutig; wenn aber G $>$ A bey W $< 90^{\circ}$ und A $< 90^{\circ}$, so ist w spizig. Beweis. Das erste heißt, bey den Voraussezungen findet sowol ein Dreyeck SP als ein Dreyeck U statt. Ganz richtig; denn AB, B und AC mögen diese verlangten Eigenschaften haben, so wird man eben dieselben bey AB, B und AF finden, wenn DF = DC. Nemlich weil AB $>$ AC, so ist nach VI. 1. DB $>$ AB; nimmt man nun DF = DC, so ist AF = AC nach VI. 1. Da aber DFA nach IV = DCA, so ist BFA = 2 R — DCA; demnach der zu suchende W. w ent-

entweder BCA und das Dreyeck ein SP, oder oder jener ist BFA = 2R — BCA, dieses Dreyeck also ein U. Im zweyten Falle kann darum keine Zweydeutigkeit statt finden, weil, wenn AC > AB, auch DC > DB ist, und also kein DF = DC zwischen D und B liegt. 2. Wenn G > A bey W > 90° und A > 90°, so ist W zweydeutig; wenn aber G < A bey W > 90° und A > 90°, so ist w stumpf; also im erstern Falle soll sowohl ein Dreyeck ST als U statt finden. Beweis. W = Abc; A = Ab; G = Ac = Af, beyde nach VI. 2 > A; also sowol Dreyeck bAc als Dr. bAf findet statt; in dem leztern ist aber bfA = 2 R — bcA, weil cfA = bcA ist. Ist aber G < Ab d. i. cd > cb, so kann kein cf = dc statt finden. 3. Wenn G < 2R — A bey W < 90° und A > 90°, so ist w zweydeutig; wenn aber G > 2 R — A bey W < 90° und A > 90°, so ist w stumpf; im leztern Falle findet nur ein Dreyeck U, im ersten ein Dreyeck

U,

U, und ein Dreyeck SP statt. Beweis. $W = AbC$; $A = Ab$; $G < 2R - A$, d. i. $G < AB$, also G zum Beyspiel $= AC = AF$ u. s. w. 4. Wenn $G > 2R - A$ bey $W > 90^\circ$ und $A < 90^\circ$, so ist w zweydeutig; wenn aber $G < 2R - A$ bey $W > 90^\circ$ und $A < 90^\circ$, so ist w spitzig; in jedem Falle findet sowohl ein ST als ein U, in diesem nur ein U statt. Beweis. $W = ABc$; $A = AB$; $G > 2R - A$, also $G > Ab$; demnach G zum Beyspiel $= Ac = Af$ u. s. w.

VIII. Eben so wird man, wenn aus den beyden Winkeln am Grunde, W und w, und einer dem einen Winkel z. B. W anliegenden Seite, A, die ihm gegenüberstehende Seite, G, gesucht werden soll, unter folgenden Umständen auf Zweydeutigkeiten stoßen. 1. Nur wenn $w > W$ bey $W < 90^\circ$ und $A < 90^\circ$ ist G spitzig; wenn aber $w < W$ bey $W < 90^\circ$ und $A < 90^\circ$ ist G zweydeutig. Beweis. $W = ACB$; $A = AC$; $w < ACB$, also w z. B. $= DBA$; aber w alsdenn auch $= DBA$,

wenn

wenn DB = 2R − DB. Nemlich nach 97. VII. ist Ct CBA = s DB . Ct AD (s. IV.) und eben so Ct CBA = sDB . Ct AD; aber sDB = s2R − DB = sDB; demnach CtCBA = CtCBA; also Winkel CBA = CBA und beyde = w. Folglich kann das zu suchende G sowol AB als AB seyn. Aber nur wenn w > W, findet diese Zweydeutigkeit statt; denn bey w > W, d. i. DB < DC (s. IV.) findet zwischen D und c kein DB = 2R − DB statt; nemlich Dc = 2R − DC; wäre nun DB < DC, und z. B. = DC − x, so wäre DB = 2R − DB = 2R + x − DC, folglich nicht zwischen D und c enthalten, sondern über c hinausgehend. 2. Auch w > W bey W > 90° und A > 90° gibt G zweydeutig; aber w < W bey W > 90° und A > 90° gibt G stumpf. Beweis. W = Acb; A = Ac; w > Acb = z. B. Abc; aber alsdenn ist w auch = Aβc, wenn dβ = 2R − db u. s. w. wie bey 1. 3. Eben so w > 2R − W bey W < 90° und A > 90° gibt G zweydeutig; aber w < 2R −

W

W bey W $<$ 90° und A $>$ 90° gibt G spizig.
Beweis. In jedem Falle, in welchem in 1. ein doppeltes G = AB = AB statt fand, muß auch hier eben dasselbe statt finden; dort wenn DBA $<$ DCA, also wenn ABc (des ersteren Nebenwinkel) $>$ 2R − DCA = 2R − BcA, und dies ist, wenn im Dreyecke cAB, AcB = W; Ac = A; ABc = w, jedesmal wenn w $>$ 2R − W. 4. Endlich w $<$ 2 R − W bey W $>$ 90° und A $<$ 90° gibt G zweydeutig; aber w $>$ 2R − W bey W $>$ 90° und A $<$ 90° gibt G stumpf.

Beweis. Das nicht auszumachende Ab oder Aβ bey den Datis in 2. findet unter gleichen Umständen für ein Dreyeck ACβ oder ACb wieder statt; dort wenn dbA $>$ dcA, hier also wenn des erstern Nebenwinkel kleiner ist als der des leztern, also wenn AbC $<$ 2R − ACb, welches das behauptete ist, wenn ACb = W; AC = A und AbC = w gesezt werden.

Zusaz. Der Bogen des Grundes DB oder db, d. i. der zwischen den Berührungspuncten eines Perpendikels und des ihm zunächst liegenden Schenkels eines Dreyecks U mit dem Grunde, ist immer spizig, abgerechnet in den eben in VIII aufgeführten Fällen, wo auch dieser Bogen zweydeutig wird und DB auch Dβ, db auch dβ seyn kann.

100. Lehrsäze. In einem schiefwinklichten sphärischen Dreyecke ABC, (s. 13te Fig.) in welchem CB der Grund, und AD das Perpendikel ist, ist

I. sC : sB = sAB : sAC;

II. tC : tB = sBD : sCD;

III. csAC : csCD = csAB : csBD;

IV. sCAD : csC = sBAD : csB

V. csCAD : csBAD = tBA : tAC.

Die Beweise werden aus I. II. III IV. VIII. in 96. und 97. hergenommen, indem man die beyden rechtwinklichten sphärischen

Dreyecke ADB und ADC betrachtet, welche AD gemeinschaftlich haben. Nach 96. I. ist zum Beyspiel r:sAC = sC : sAD; und auch r:sAB = sB:sAD; daher (s. erste Abtheil. §. 87.) sAC . sC = r . sAD und auch sAB . sB = r . sAD; demnach sAC . sC = sAB.sB, woraus nach dem 2ten Zusaze des eben aus der ersten Abtheil. angeführten §. das in I. behauptete: sC : sB = sAB : sAC wird. Auf diese und ähnliche Art führt man den Beweis der übrigen Säze.

101. Lehrs. Nennt man die 3 Seiten eines schiefwinklichten sphärischen Dreyecks (s. 14te Fig.) ABC, a, b, c, nemlich a, die dem Winkel A entgegenstehende Seite CB, b die B entgegenstehende Seite AC, und c die C entgegenstehende Seite AB: so ist, bey dem

$$\text{Halbmesser} = 1,\ csC = \frac{cs.c - csb.csa}{sb.sa}$$

Beweis. I. Man ziehe nach D der Kugel Mittelpunct, die Halbmesser AD, BD und CD; lasse

lasse hierauf AE auf DB, AF auf DC und AG auf die Ebene DBC, alle 3 aus A, senkrecht herab, und ziehe FE, FG und GE, so ist

AF = sb

AE = sc;

FD = csb;

ED = csc;

AG = AF . sC = sb.sC, weil AGF ein in G rechtwinklichtes Dreyeck, und dabey GF auf DC senkrecht ist: folglich ist W. AFG = C (s. §§. 88 und 60. Zus. 8);

und FG = AF . csC = sb . csC.

II. Im Dreyecke FDE ist nach §. 94. Zus. 1. $FE^2 = DE^2 + DF^2 - 2DE . DF .$ cs EDF = cs c^2 + csb^2 − 2 cs c . cs b . cs a. Ferner ist nach §. 90. FE : DE = s a : sDFE; demnach sDFE, oder weil W. DFE + EFG = 90°, cs EFG = $\frac{cs\ c\ .\ sa}{FE}$

III. Im Dreyecke EFG ist auch nach 94. 1.

 EG

$EG^2 = FG^2 + FE^2 - 2\ FG\ .\ FE\ .\ cs$
EFG; das ist

$EG^2 = FG^2 + FE^2 - 2\ FG\ .\ cs\ c\ .\ s\ a$;

auch ist, weil EG eine Kathete in dem recht-winklichten Dreyeck AGE ist, $EG^2 = AE^2 - AG^2$; demnach

$AE^2 - AG^2 = FG^2 + FE^2 - 2\ FG$
$cs\ c\ .\ sa$;

$2\ FG\ .\ cs\ c\ .\ s\ a = FG^2 + FE^2 - AE^2$
$+ AG^2$;

aber $FG^2 + AG^2$ ist, da AGF ein rechtw. Dr. ist $= AF^2$; also $2\ FG\ .\ cs\ c\ .\ sa = AF^2 + FE^2 - AE^2$;

$- - - = sb^2 + csc^2 + csb^2 - 2\ cs\ c\ .\ csb\ .$
$cs\ a - sc^2$;

aber $sb^2 + csb^2 = 1$; also

$- - - = 1 + csc^2 - 2\ cs\ c\ .\ csb\ .\ csa$
$- sc^2$;

ferner $- sc^2 = - 1 + cs\ c^2$, weil sc^2
$= 1 - csc^2$ ist:

dem-

demnach

$$-- = 1 + cs c^2 - 2\, cs\, c \,.\, csb \,.\, csa - 1 + cs\, c^2$$

$$-- = 2\, cs\, c^2 - 2\, cs\, c \,.\, csb \,.\, csa;$$ also

$$2\, s\, b \,.\, cs\, C : cs c \,.\, sa = 2\, cs\, s\, (cs\, c - csb \,.\, csa);$$

$$sb \,.\, cs\, C \,.\, sa = cs\, c - csb \,.\, csa;$$

$$cs\, C = \frac{cs\, c - csb \,.\, csa}{sb \,.\, sa}$$

Zus. 1. Diese Formel kann auch nach §. 82. 2 in $cs\, C = \frac{cs\, c}{sb \,.\, sa} - Ct\, b \,.\, Ct\, a$ verwandelt werden.

Zus. 2. Auch ergibt sich aus ihr

 x —

$$1 - cs\,C = \frac{sb\,.\,sa - cs\,c + cs\,b\,.\,cs\,a}{sb\,.\,sa}$$

und hieraus nach 87. III.

$$1 - cs\,C = \frac{cs\,(b - a) - cs\,c}{sb\,.\,sa}$$

Zus. 1. Die letztere Formel gibt einen noch bequemern Ausdruck für $s\,\frac{1}{2}\,C^2$, woraus man C leicht findet, an die Hand. Nemlich b, a, in c mögen einen Werth haben, welchen sie wollen, so lassen sich immer zwey andere Grössen g und k angeben, deren Unterschied $= b - a$, und deren Summe $= c$ sey. Also

$$g - k = b - a, \text{ und}$$
$$g + k = c \quad ; \text{ also}$$
$$2g = c + (b - a)$$
$$2k = c - (b - a)$$
$$g = \tfrac{1}{2}(c + (b - a))$$
$$k = \tfrac{1}{2}(c - (b - a)).$$

Demnach ist $cs\,(b - a) - cs\,c. = cs(g - k) - cs\,(g + k)$, und dieses nach 87. Zus. 3. $= 2\,s\,g\,.\,s\,k = 2\,.\,s\,.\,\tfrac{1}{2}.(c + (b - a))\,.\,s\,\tfrac{1}{2}\,.\,(c - (b - a))$; folglich

$$1 - cs\,C = \frac{2\,s\,\tfrac{1}{2}\,(c + (b - a)).s\tfrac{1}{2}.(c - (b - a))}{sbsa};\text{ aber}$$

nach §. 87. Zus. 2 N. 3. ist

$$\frac{\sqrt{1 - cs\,C}}{2} = s\,\tfrac{1}{2}\,C;$$ also

$$\frac{1 - cs\,C}{2} = s\,\tfrac{1}{2}\,C^2;$$ oder

$$1 - cs\,C = 2\,.\,s\,\tfrac{1}{2}\,C^2;$$ demnach

$$2\,.\,s\,\tfrac{1}{2}\,C^2 = \frac{2\,.\,s\,\tfrac{1}{2}\,(c + (b - a))\,.\,s\,\tfrac{1}{2}\,.\,(c - (b - a))}{s\,b\,.\,s\,a};$$ also

$$s\,\tfrac{1}{2}\,C^2 = \frac{s\,\tfrac{1}{2}\,(c + (b - a))\,.\,s\,\tfrac{1}{2}\,.\,(c - (b - a))}{s\,b\,.\,s\,a};\ =$$

Um

Um diese Formel für Tafeln, in welchen der Sinus totus nicht = 1, sondern = r ist, nach § 84. abzuändern, merke man, wenn der Sinus nach solchen Tafeln sin. tab. heißt, so ist $s \frac{1}{2} C = \frac{\sin tab \frac{1}{2} C}{r}$, also $s \frac{1}{2} C^2 = \frac{\sin. tab. \frac{1}{2} C^2}{r^2}$ u. s. w. Aus der angegebenen Formel wird demnach

$$\frac{\text{sin. tab. } \frac{1}{2} C^2}{r^2} = \frac{\frac{\text{sin. tab. } \frac{1}{2}(c + b - a)}{r} \cdot \frac{\text{sin. tab. } \frac{1}{2}(c - (b - a))}{r}}{\frac{\text{sin. tab. b}}{r} \cdot \frac{\text{sin. tab. a.}}{r}}$$

$$- - - - - = \frac{\text{sin. tab. } \frac{1}{2}(c + b - a) \cdot \text{sin. tab. } \frac{1}{2}(c - (b - a))}{\text{sin. tab. b . sin. tab. a}}$$

also $\text{sin. tab. } \frac{1}{2} C^2 = r^2 \cdot \frac{\text{sin. tab. } \frac{1}{2}(c + b - a) \cdot \text{sin. tab. } \frac{1}{2}(c - (b - a))}{\text{sin. tab. b . sin. tab. a}}$

102.

102. Lehrsäze. I. Die Summe der beyden Sinusse, cf und ae, (s. 15te Fig.) zweyer Bogen, cb und ba, verhält sich zur Differenz eben dieser beyden Sinusse, cf — ae, wie gh und gk, die Tangenten der halben Summe und des halben Unterschiedes der beyden Bogen sich zu einander verhalten; das ist:

$$s\,cb + s\,ba : s\,eb - s\,ba = t.\ \frac{cb + ba}{2} :$$

$$t\ \frac{eb - ba}{2}$$

Beweis. Außer den Halbmessern db, dc, und den Sinussen ae und cf, ziehe man die Sehne ca und halbire sie in l, so theilet der Halbmesser dg, ca in 2 gleiche Theile; also ist

$cg = \frac{cb + ba}{2}$ und $gh = t\ cg =$

$t\ \frac{cb + ba}{2}$; eben so ist $gk = t\ gb = t$

$\frac{cb - ba}{2}$, denn da $cb = cg + gb = ab$

$+ bg + gb = ab + 2\,gb$ ist, so ist $cb -$

ba

$ba = 2\,gb$, also $gb = \frac{cb - ba}{2}$. Die Dreyecke aem und cfm sind, weil aem = cfm und ame = cmf, ähnlich; demnach

$$cf : ae = cm : ma;$$

$$cf + ae : cf - ae = cm + ma : cm - ma;$$

man sehe §. 89. 1. der ersten Abtheilung,

$$cf + ae : cf - ae = \frac{cm + ma}{2} : \frac{cm - ma}{2};$$

$$cf + ae : cf - ae = cl : lm,$$

welches man in Hinsicht des lm und $\frac{cm - ma}{2}$ eben so ersieht, wie kurz vorhin in Hinsicht des gb und $\frac{cb - ba}{2}$; aber $cl : lm = gh : gk$, weil offenbar $cl : hg = lm : gk$ ist. Demnach

$$cf + ae : cf - ae = gh : gk.$$

II. Ferner verhält sich die Summe der Cosinusse zweyer Bogen zu ihrer Differenz, wie die Cotangente der halben Summe beyder Bogen zur Tangente ihrer halben Differenz, oder cs pc

+

$+ cs\,np : cs\,ps - cs\,np = Ct\,\frac{np + pc}{2} : t\,\frac{np - pc}{2}$

Beweis. Man nehme $nt = \frac{1}{2}\,nc$, und denke sich $bg = pt$, welche Gleichheit der Allgemeinheit des in I behaupteten unbeschadet statt hat, so ist $tc + cg = pc + cb = ab + np = 90^\circ$; also jedes dieser 3 Winkelpaare enthält 2 sich ergänzende Winkel. Aendert man die 3 ersten Gliedern in I. hiernach ab, so hat man:

$$cs\,pc + cs\,np : cs\,pc - cs\,np = Ct\,\frac{pc + np}{2} : t\,\frac{cb - ab}{2};$$

aber $\frac{cb - ba}{2} = bg = pt = \frac{np - pc}{2}$; demnach

$$cs\,pc + cs\,np : cs\,pc - cs\,np = Ct\,\frac{pc + np}{2} : t\,\frac{np - pc}{2}.$$

103. Lehrs. I. In einem sphär. schiefw. Dreyecke (s. 13te Fig.) ABC ist

$$\mathrm{Ct}\,\frac{DB+CD}{2} : \mathrm{t}\,\frac{DB+DC}{2} = \mathrm{Ct}\,\frac{AB+AC}{2}$$

$$: \mathrm{Ct}\,\frac{AB-AC}{2}$$

Beweis. Es ist nach 100 III.

$cs\,DC : cs\,DB = cs\,AC : cs\,AB$; folglich

$cs\,DC + cs\,DB : cs\,DC - cs\,DB = cs\,AC +$
$cs\,AB : cs\,AC - cs\,AB$,

woraus nach 102. II. sich das verlangte

$$\mathrm{Ct}\,\frac{DB+DC}{2} : \mathrm{t}\,\frac{DB-DC}{2} = \mathrm{Ct}\,\frac{AB+AC}{2}$$

$$: \mathrm{t}\,\frac{AB-AC}{2}$$

ergibt.

II. Ferner ist

$$\mathrm{t}\,\frac{CAD+DAB}{2} : \mathrm{t}\,\frac{CAD-DAB}{2} = \mathrm{Ct}$$

$$\frac{C+B}{2} : \mathrm{t}\,\frac{C-B}{2}$$

Beweis. Nach 100 IV ist

$s\,CAD : s\,DAB = cs\,C : cs\,B$; also

$sCAD + sDAB : sCAD - sDAB = csC +$
$csB : csC - csB$

und hieraus wird nach 102. I und II

$$t\,\frac{CAD+DAB}{2} : t\,\frac{CAD-DAB}{2} = t\,\frac{C+B}{2} : t\,\frac{C-B}{2}.$$

104. Aufgabe. Man hat in einem schief-winklichten sphärischen Dreyeck

I einen Winkel zu suchen, und zwar

1. a. aus 3 gegebenen Seiten.

Auflösung. 1. Man wendet eine der Formeln aus §. 101. an. Es sey z. B. AC = 60°, AC = 40°, CB = 72°, so ist sin. tab. $\frac{1}{2}$ C² = $r^2 . \frac{\text{sin. tab. } 46^\circ . \text{sin. tab. } 14^\circ}{\text{sin. tab. } 40^\circ . \text{sin. tab. } 72^\circ}$. Die Rechnung wird mit Logarithmen so angestellt:

L. sin. tab. 46°	=	9,8569341
L. sin. tab. 40°	=	9,3836752
L. r²	=	10,0000000
L (r². s. tab. 46°. s tab. 14°)	=	29,2406093

Eben so

L. sin. tab 40°	=	9,8080675
L. sin. tab. 22°	=	9,9782063
L (s. tab. 40°, s. tab. 72°)	=	19,7862738

diese Summe von obiger abgezogen gibt

L. s. tab. $\frac{1}{2}$ C² = 19,4543355;

also

$L.s.tab.\frac{1}{2}C = 9,7271677$;

folglich

$\frac{1}{2}C = 32^\circ, 14', 42'', 03'''$.

und

$C = 64^\circ, 29', 24'', 06'''$.

Oder 2. Man sucht nach 103. I erst CD; nemlich

$$\text{Ct}\,\frac{AB+AC}{2} : t.\frac{AB-AC}{2} = \text{Ct}\,\frac{BC}{2} : t\frac{DB-DC}{2}$$

heißt hier

$$\text{Ct}.50^\circ : t.10^\circ = \text{Ct}.36^\circ : t\frac{DB-DC}{2}$$

$$\begin{array}{l} L.t.10^\circ = 9,2463188 \\ L.\text{Ct}.36^\circ = 10,1387390 \\ \hline L.t10^\circ.\text{Ct}.36^\circ = 19,3850578 \\ L.\text{Ct}\;50^\circ = 9,9238135 \\ \hline L.t.\frac{DB-DC}{2} = 9,4612443 \end{array}$$

demnach

$$\frac{DB-DC}{2} = 16^\circ, 07', 53'', 21'''$$

und

$$\begin{array}{l} DB-DC = 32^\circ, 15', 46'', 42'''; \text{ aber} \\ DB+DC = 72^\circ, \text{ also ist} \\ \hline 2\,DC = 39^\circ, 44', 13'', 18'''; \text{ demnach} \\ DC = 19^\circ, 52', 6'', 39'''. \end{array}$$

Hier

Hieraus nun und aus AC findet man nach 97. VIII. C, nemlich

$tAC : t\ CD = r : csC$, ist hier

$t. 40^\circ : t. 19^\circ, 52', 6'', 39''' = r : csC$;

$L.r = 10^\circ$; $L.t. 19^\circ, 52', 6'', '39 =$ 9,5579563; also $L.(r.t. 19^\circ$, u. s. w) $=$ 19,5579563; hievon $L.t.40^\circ = 9,9238135$, bleibt $L.csC = 9,6341428$; wodurch man $C = 64^\circ, 29', 24'', 06'''$ erhält, wie oben.

2. aus 2 gegebenen Seiten und einem gegebenen Winkel, und zwar

b. indem die gegebenen Seiten den gegebenen Winkel einschließen.

Auflösung. Wenn man aus AB, BC und B, C suchen soll, sucht man zuerst BD aus AB und B; dies nach 97 VIII

$r : cs\ B = t\ AB : t.\ DB$

hieraus ergibt sich, weil man BC weiß, DC; alsdenn findet man C aus DC und CA nach 97. VIII, nemlich

$t\ AC : t\ CD = r : cs\ C$.

c. indem die gegebenen Seiten den zu suchenden Winkel einschließen.

Auflösung. Wenn aus AB, AC und B, A gesucht werden soll, gibt nach 97. IX.

$$r : cs\,AB = t\,B : ct\,DAB$$

DAB an; hierauf erhält man durch

$$t\,AC : t\,AB = cs\,DAB : cs\,CAD$$

in 100. V auch CAD, und hat also DAB + CAD = A.

d. indem die gegebenen Seiten den 3ten Winkel einschließen.

Auflösung. Man findet aus AB, AC und B gleich C nach 100. I.

3. aus 2 gegebenen Winkeln und einer gegebenen Seite, und zwar

e. indem die gegebene Seite zwischen den gegebenen Winkeln liegt.

Auflösung. Um aus C, A und AC, B zu finden, sucht man erst durch

$$r : cs\,AC = t\,C : ct\,CAD$$

aus 97. IX CAD und hierauf, da BAD = A — CAD auch bekannt ist, durch

$$s\, CAD : cs C = s\, BAD : cs B$$

in 100. IV. den verlangten Winkel B.

f. indem die gegebene Seite zwischen einem der beyden gegebenen Winkeln und dem zu suchenden Winkel liegt.

Auflösung. Um aus C, B und AC, A zu finden, sucht man erst, wie im vorhergehenden Falle, CAD, und hierauf durch

$$cs\, C : s\, CAD = cs\, B : s BAD$$

in 100. IV. BAD; so hat man $CAD + BAD = A$.

II. Eine Seite zu suchen, und zwar

1. g aus 3 gegebenen Winkeln.

Auflösung. Um aus A, B und C, AC zu finden, sucht man erst aus diesen Größen durch

$$ct \frac{C+B}{2} : t \frac{C-B}{2} = t \frac{A}{2} : t \frac{CAD - DAB}{2}$$

in 103. II $\frac{CAD - DAB}{2}$, und hieraus CAD, alsdenn das verlangte durch

$$t\, C : ct\, CAD = r : cs\, AC$$

in 97. IX.

2. aus 2 gegebenen Winkeln und einer gegebenen Seite, und zwar

h. indem die beyden gegebenen Winkel an der gegebenen Seite liegen.

Auflösung. Um aus A, C und AC; AB zu finden, sucht man zuerst CAD und BAD durch

$$r : cs\,AC = t\,C : ct\,CAD$$

in 97. IX und hierauf das verlangte durch

$$cs\,BAD : cs\,CAD = t\,AC : t\,AB$$

in 100. V

i. indem die beyden gegebenen Winkel an der zu suchenden Seite liegen.

Auflösung. Um aus C, B und AC, CB zu finden, sucht man zuerst CD durch

$$r : cs\,C = t\,AC : t\,CD$$

in 97. VIII, alsdenn BD durch die in 100. II enthaltene Proportion

$$t\,B : t\,C = s\,CD : s\,BD$$

worauf $CD + BD = CB$ das verlangte gibt

k. indem die beyden gegebenen Winkel an der 3ten Seite liegen.

Auf-

Auflösung. Man findet AB und C, B und AC gleich nach 100. I.

3. aus 2 gegebenen Seiten und einem gegebenen Winkel und zwar

l. indem der gegebene Winkel zwischen beyden gegebenen Seiten liegt.

Auflösung. Um aus AC, CB und C, AB zu finden, sucht man zuerst CD, und DB = CB − CD, durch

$$r : cs\,C = t\,AC : t\,CD$$

in 97. VIII; hierauf ergibt sich durch

$$cs\,CD : cs\,AC = cs\,BD : cs\,AB$$

in 100. III das verlangte.

m. indem der gegebene Winkel zwischen einer der beyden gegebenen Seiten und der zu suchenden Seite liegt.

Auflösung. Um aus AC, AB und C, CB zu finden, sucht man zuerst, wie im vorhergehenden Falle, CD; hierauf erhält man aus

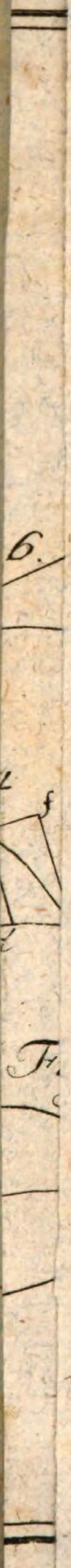
$$cs\,AC : cs\,CD = cs\,AB : cs\,BD$$

in 100 III auch BD, und in CD + BD = B das verlangte.

Zus.

Zus. Es genüge auf einige Zweydeutigkeiten bey diesen Auflösungen mehr hinzuweisen und aufmerksam zu machen, als sie alle herzusezen, und ihre Hebung und Nichthebung umständlich darzuthun. So ist zum Beyspiel in a, C spizig oder stumpf, nachdem cs C = $\frac{\text{cs c} - \text{csb . csa}}{\text{sb . sa}}$ in 101. positiv oder negativ ist; in b ist C nicht zweydeutig, wenn bey AB < 90 und B < 90 CD > DB ist; aber bey AB < 90, B < 90 und CD < DB ist C zweydeutig. Man sehe §. 99. VII. VIII über dergleichen zweydeutige Fälle.

Ende der zweyten Abtheilung.



BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Struve, Jacob, 1755-1841

Leitfaden für den Unterricht in der reinen Mathematik auf Schulen und Gymnasien

Bd.: 2. (1790). - 226 S. : graph. Darst.

Hannover 1790

Math.p. 554-1/2
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10082919-9
VD18 80074383-001